110年最新版 何明老師主筆

# 學測數學科歸納總整理

台北何明數學・台南宏達升學教育機構提供 台南市中山路147號7樓 電話：06－2201833

## 110年版 學測數學科各章節建議複習重點

《甲》【數與式】
(1) 有理數的運算
(2) 根式
(3) 絕對值的運算

《乙》【多項式】
(1) 一次函數與二次函數
(2) 餘式定理
(3) 共軛複數根
(4) 牛頓定理→判別有理根
勘根定理→判別實根
(5) 高次及分式不等式

《丙》【數列級數】
(1) 等差數列與等比數列
(2) Σ的運算

《丁》【指數與對數】
(1) 對數的運算
(2) 指數與對數圖形
(含凹口向上與凹口向下)
(3) 指數與對數不等式
(4) 首數與尾數
(5) 指數與對數的應用題

《戊》【排列與組合】
(1) 排列與組合關係
(尤其注意重複組合！!)
(2) 巴斯卡定理與二項式定理

《己》【機率】
(1) 取球問題
(2) 條件機率與貝氏定理

《庚》【統計】
(1) 平均數與標準差的線性變換

《辛》【相關係數與迴歸直線】
(1) 相關係數的運算
(2) 迴歸直線標準式
(含其斜率與相關係數關係)

《壬》【三角函數】
(1) 廣義角
(2) 正弦定理與餘弦定理
(3) 面積
(4) 三角測量
(5) 倍角與半角

《癸》【直線與線性規劃】
(1) 直線的斜率、對稱、距離問題
(2) 線性規劃及其應用

《子》【平面向量與空間向量】
(1) 三角形的重心、內心、外心、垂心
(2) 向量的內積（含夾角與面積）
(3) 正射影
(4) 空間向量的外積與體積
(5) 行列式的運算

《丑》【圓】
(1) 圓與直線關係
(2) 圓的切線
(含已知切點及未知切點求切線)

《寅》【空間平面與空間直線】
(1) 空間平面的對稱、投影、距離、夾角
(2) 空間平面與空間直線的關係

《卯》【矩陣】
(1) 高斯消去法
(2) 二階反方陣
(3) 轉移矩陣的求解

《辰》【二次曲線】
(1) 拋物線的定義及應用
(2) 橢圓的定義及應用
(3) 雙曲線的定義及應用

## 學測歸納重點《甲》 數與式

**【範例一】**

下列哪些數的小數部份為原數的倒數？
(1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (3) $\sqrt{2}+1$ (4) $\sqrt{2}-1$ (5) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

**答**：(1)(3)(5)

**解**：(1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$

(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 小數部分即 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\therefore\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\neq1$

(3) $\sqrt{2}+1=2+(\sqrt{2}-1)$ $\therefore(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$

(4) $\sqrt{2}-1$ 小數部分即 $\sqrt{2}-1$ $\therefore(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)\neq1$

(5) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3+\frac{\sqrt{13}-3}{2}$ $\therefore\frac{3+\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}-3}{2}=1$

**【範例二】**

某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 $a$ 後，螢幕上的數會變成 $a^2$。當一開始時螢幕上的數 $b$ 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 $81^3$。
試問實數 $b$ 最接近下列哪一個選項？
(1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81 【106 年學測】

**答**：(3)

**解**：$\left(\left(b^2\right)^2\right)^2=81^3\Rightarrow b^8=\left(3^4\right)^3\Rightarrow b=3^{\frac{12}{8}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}\doteqdot5.2$

**【範例三】**

設 $k$ 為一整數，已知 $\frac{k}{3}<\sqrt{31}<\frac{k+1}{3}$，則 $k=$_____。 【102 年學測】

**答**：16

**解**：$\because k<3\sqrt{31}<k+1$ $\therefore k^2<279<(k+1)^2$ 但 $16^2=256$，$17^2=289$ $\therefore k=16$

**【範例四】**

$\left(3+\sqrt{7}\right)^3=a+b\sqrt{7}$，$\left(3-\sqrt{7}\right)^3=c+d\sqrt{7}$，其中 $a$、$b$、$c$、$d$ 都是有理數，試求 $(a-c)+(b-d)=$_____。

**答**：68

**解**：$\because(a-c)+(b-d)\sqrt{7}=\left(3+\sqrt{7}\right)^3-\left(3-\sqrt{7}\right)^3=68\sqrt{7}$

$\therefore(a-c)+(b-d)=0+68=68$

**【範例五】**

下列哪些敘述是正確的？
(A) 若 $a+b$、$a-b$ 是有理數，則 $a$、$b$ 是有理數。
(B) 若 $a\times b$、$a\div b$ 是有理數，則 $a$、$b$ 是有理數。
(C) 若 $a^{2005}$、$a^{94}$ 是有理數，則 $a$ 是有理數。何明珍藏重要考題
(D) 若 $a+b$ 是有理數，$ab$ 是無理數，則 $a-b$ 是無理數。
(E) 若 $a$、$b$ 是有理數且 $a+b\sqrt{3}=0$，則 $a=b=0$。

**答**：(A)(C)(D)(E)

**解**：(B) $a=\sqrt{3}$、$b=-\sqrt{3}$，$a\times b$、$a\div b$ 均為有理數，但 $a$、$b$ 為無理數
(C) 2005 與 94 互質，故 $a$ 為有理數
(D) 若 $a-b$ 為有理數，則因 $a+b$ 為有理數，故 $(a+b)+(a-b)=2a$、$(a+b)-(a-b)=2b$，$\therefore a$、$b$ 均為有理數，故 $ab$ 為有理數(矛盾)

**【範例六】**

若 $|ax+3|\geq b$ 之解為 $x\leq2$ 或 $x\geq6$，則數對 $(a,b)$ 為何？
(A) $(-\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ (B) $(\frac{3}{2},-\frac{3}{4})$ (C) $(\frac{3}{4},-\frac{3}{2})$ (D) $(-\frac{3}{4},\frac{3}{2})$ (E) $(\frac{3}{4},\frac{3}{2})$

**答**：(D)

**解**：$|ax+3|\geq b\Rightarrow\left|x+\frac{3}{a}\right|\geq\frac{b}{|a|}$ …①

$x\leq2$ 或 $x\geq6\Rightarrow x-4\leq-2$ 或 $x-4\geq2\Rightarrow|x-4|\geq2$ …②

由①② 得 $\frac{3}{a}=-4$、$\frac{b}{|a|}=2$，則 $a=-\frac{3}{4}$、$b=2|a|=\frac{3}{2}$

**【範例七】**

試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於 3？
(1) 1 個 (2) 4 個 (3) 6 個 (4) 8 個 (5) 10 個 【109 年學測】

**答**：(3)

**解**：$\begin{cases}x-\sqrt{101}<5\\x-\sqrt{38}>3\end{cases}\Rightarrow3+\sqrt{38}<x<5+\sqrt{101}$

$\therefore 9.\sim<x<15.\sim$ $\therefore x=10,11,\ldots,15$ 共有 $(15-10)+1=6$ 個

**【範例八】**

設 $x$ 為實數，求 $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$ 的最小值為_____。

**答**：5

**解**：所求 $=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+1|+|x+2|+|x-3|$

$=|x+2|+|x+1|+|x-3|$ 取 $x=-1$ 得最小為 5

**【範例九】**

已知 $x$，$y\in\mathbb{R}$，若 $\left|x+\frac{1}{2}\right|\leq\frac{3}{2}$，$\left|y-\frac{5}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$，則求下列各式範圍：
(1) $x-y$ (2) $xy$ (3) $\frac{x}{y}$ (4) $x^2+y^2$ (5) $xy-3x-2y+1$

**答**：(1) $-5\leq x-y\leq-1$ (2) $-6\leq xy\leq3$ (3) $-1\leq\frac{x}{y}\leq\frac{1}{2}$

(4) $4\leq x^2+y^2\leq13$ (5) $[-5,-1]$

**解**：(1) $\because-2\leq x\leq1$ 且 $2\leq y\leq3$ $\therefore\begin{array}{r}-2\leq\ x\leq\ 1\\+)\ -3\leq-y\leq-2\\\hline-5\leq x-y\leq-1\end{array}$

(2) $\begin{cases}-2\leq x\leq1\\2\leq y\leq3\end{cases}\Rightarrow-6\leq xy\leq3$ (3) $\begin{cases}-2\leq x\leq1\\2\leq y\leq3\end{cases}\Rightarrow-1\leq\frac{x}{y}\leq\frac{1}{2}$

(4) $\begin{array}{l}-2\leq x\leq\ 1\Rightarrow\\2\leq y\leq3\Rightarrow\end{array}\begin{array}{r}0\leq x^2\leq4\\+)\ \ 4\leq y^2\leq9\\\hline4\leq x^2+y^2\leq13\end{array}$

(5) $xy-3x-2y+1=x(y-3)-2(y-3)-5=(x-2)(y-3)-5$

$\because-4\leq x-2\leq-1$ 且 $-1\leq y-3\leq0$

$\therefore0\leq(x-2)(y-3)\leq4$ $\therefore-5\leq(x-2)(y-3)-5\leq-1$

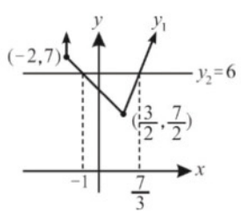
**【範例十】**

(1) 方程式 $|x+2|+|2x-3|=6$ 的解為_____。
(2) 方程式 $|x+2|+|2x-3|\leq6$ 的解為_____。

**答**：(1) $-1$，$\frac{7}{3}$ (2) $-1\leq x\leq\frac{7}{3}$

**解**：令 $\begin{cases}y_1=|x+2|+|2x-3|\\y_2=6\end{cases}$

(1) 由圖中討論 $y_1=y_2$
① $(x+2)-(2x-3)=6$ $\therefore x=-1$
② $(x+2)+(2x-3)=6$ $\therefore x=\frac{7}{3}$

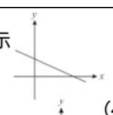


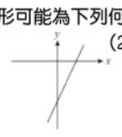
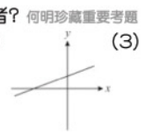
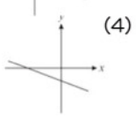
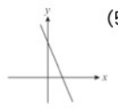

(2) 由已知得 $y_1\leq y_2$ $\therefore-1\leq x\leq\frac{7}{3}$

## 學測歸納重點《乙》 多項式

**【範例一】**

一次函數 $y=ax+b$ 的圖形如右圖所示，則函數 $y=(b-a)x+\frac{b}{a}$ 的圖形可能為下列何者？何明珍藏重要考題



(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

**答**：(1)

**解**：$a<0$，$b>0$ $\Rightarrow b-a>0$，$\frac{b}{a}<0$

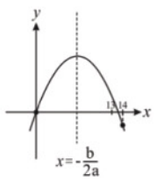
**【範例二】**

設二次函數 $f(x)=ax^2+bx$，$a<0$。若 $f(13)>0$，$f(14)<0$，請問下列哪些選項是正確的？
(1) $2a-b>0$ (2) $a+b>0$ (3) $f(6)>f(7)$
(4) $f(7)<f(8)$ (5) $f(8)>f(9)$

**答**：(2)(5)

**解**：$f(x)=x\cdot(ax+b)$ 過 $(0,0)$ $\because$ 開口向下 $\therefore a<0$，$\frac{-b}{2a}>0\Rightarrow b>0$

(1) $\therefore2a-b<0$ 何明珍藏重要考題
(2) $f(1)>0$ $\therefore a+b>0$
(3)(4)(5) 頂點 $x$ 坐標在 $\left(\frac{0+13}{2},\frac{0+14}{2}\right)=(6.5,7)$ 之間




$\therefore f(6)<f(7)$，$f(7)>f(8)$，$f(8)>f(9)$

**【範例三】**

拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 圖形如右，請問下列各式之值何者為正？
(A) $ac$ (B) $a+b+c$ (C) $a-b+c$
(D) $b^2-4ac$ (E) $2a+b$。

**答**：(B)(D)

**解**：(A) $a<0$，$c>0$ $\therefore ac<0$ (B) $x=1\Rightarrow y=a+b+c>0$
(C) $x=-1\Rightarrow y=a-b+c<0$ (D) $b^2-4ac>0$
(E) $x=2$ 時 $y=4a+2b+c<0$ $\therefore2(2a+b)+c<0$，但 $\because c>0$ $\therefore2a+b<0$

**【範例四】**

下列哪一個選項是方程式 $x^3-x^2+4x-4=0$ 的解？（註：$i=\sqrt{-1}$）
(1) $-2i$ (2) $-i$ (3) $i$ (4) 2 (5) 4 【108 年學測】

**答**：(1)

**解**：$x^3-x^2+4x-4=x^2(x-1)+4(x-1)=0$

$\left(x^2+4\right)(x-1)=0$ $\therefore x=\pm2i$ 或 1

**【範例五】**

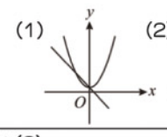
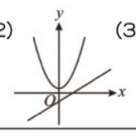
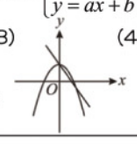
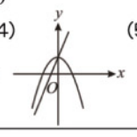
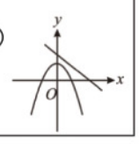
下列各方程式中，請選出有實數解的選項。
(1) $|x|+|x-5|=1$ (2) $|x|+|x-5|=6$ (3) $|x|-|x-5|=1$
(4) $|x|-|x-5|=6$ (5) $|x|-|x-5|=-1$ 【105 年學測】

**答**：(2)(3)(5)

**解**：利用三角不等式
(1)(2) $|x|+|x-5|\geq|x-x+5|=5$
(3)(4)(5) $-5\leq|x|-|x-5|\leq5$

**【範例六】**

在下列各選項的圖形中，哪一個可能是 $\begin{cases}y=ax^2+b\\y=ax+b\end{cases}$ 的圖形？

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)


**答**：(3)

**解**：① $\begin{cases}y=ax^2+b\\y=ax+b\end{cases}$ 當 $x=0$ 時，$y=b$ $\therefore$ 兩圖形均過 $(0,b)$

② $a>0$ 時 $y=ax^2+b$ 開口向上 $\Rightarrow y=ax+b$ 斜率 $a$ 為正

③ $a<0$ 時 $y=ax^2+b$ 開口向下 $\Rightarrow y=ax+b$ 斜率 $a$ 為負 $\therefore$ 答案為(3)

**【範例七】**

若二次函數 $y=x^2+mx-3$ 之圖形恆在直線 $y=x-7$ 之上方，試求實數 $m$ 的範圍_____。

**答**：$-3<m<5$

**解**：$x^2+mx-3>x-7$ $\therefore x^2+(m-1)x+4>0$，$\forall x\in\mathbb{R}$

$\therefore$ 判別式 $=(m-1)^2-16<0$ $\therefore m^2-2m-15<0$ $\therefore(m+3)(m-5)<0$

$\therefore-3<m<5$

**【範例八】**

二次函數 $f(x)=2\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{(-2-1)(-2-4)}+7\cdot\frac{(x+2)(x-4)}{(1+2)(1-4)}+2\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{(4+2)(4-1)}$，試求 $f(x)$ 的最大值為_____。

**答**：7

**解**：$f(-2)=f(4)=2$，$f(1)=7$

令 $f(x)=a(x+2)(x-4)+2$，$f(1)=-9a+2=7$ $\therefore a=-\frac{5}{9}$

$\therefore f(x)=-\frac{5}{9}(x+2)(x-4)+2=-\frac{5}{9}\left(x^2-2x-8\right)+2=-\frac{5}{9}(x-1)^2+7$

$\therefore x=1$ 時，$f(1)=7$ 最大

**【範例九】**

二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+\frac{2}{a}$ 在 $x=2$ 時有最小值 $-7$，則數對 $(a,b)=$_____。

**答**：$(2,-8)$

**解**：$y=f(x)=ax^2+bx+\frac{2}{a}$，且由已知 $y=f(x)=a(x-2)^2-7$，且 $a>0$

比較係數 $\begin{cases}b=-4a\\\frac{2}{a}=4a-7\end{cases}$ $\therefore4a^2-7a-2=0$ $\therefore(4a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\Rightarrow b=-8$

**【範例十】**

$f(x)=(x-2.1)^2+(x-2.2)^2+(x-2.8)^2+(x-2.9)^2+(x-5)^2$ 的最小值為_____。

**答**：5.5

**解**：取 $x=\frac{2.1+2.2+2.8+2.9+5}{5}=\frac{15}{5}=3$

$\therefore$ 最小值 $f(3)=0.81+0.64+0.04+0.01+4=5.5$

**【範例十一】**

設 $x,y,a\in\mathbb{R}$ 且 $x^2+3y^2=4$，若 $2x^2+3y^2+2x+a$ 的最大值為 5，則最小值為_____。

**答**：$-4$

**解**：$3y^2=4-x^2\geq0$ $\therefore-2\leq x\leq2$

原式 $=2x^2+(4-x^2)+2x+a=x^2+2x+(a+4)=(x+1)^2+(a+3)$

$x=2$ 時，最大值 $a+12=5$ $\therefore a=-7$ 何明珍藏重要考題

$x=-1$ 時，最小值 $a+3=-4$

**【範例十二】**

試求 $(2+\sqrt{5})^4-4(2+\sqrt{5})^3+(2+\sqrt{5})^2-9(2+\sqrt{5})-3$ 之值 $=$_____。

**答**：$-3-\sqrt{5}$

**解**：令 $x=2+\sqrt{5}$ $\therefore(x-2)^2=5$ $\therefore x^2-4x-1=0$

原式 $=x^4-4x^3+x^2-9x-3=(x^2-4x-1)(x^2+2)-x-1$

$=0-(2+\sqrt{5})-1=-3-\sqrt{5}$

版權所有・請勿翻印

台北何明數學・台南宏達升學教育機構提供 網址：www.hdps.com.tw 電話：06－2201833

**【範例十三】**

求 $9^7-6\times9^6-29\times9^5+19\times9^4-8\times9^3-11\times9^2+17\times9-5=$_____。

**答**：$-14$

**解**：$1-6-29+19-8-11+17-5$

$+9+27-18+9+9-18-9\,\underline{|9}$

$1+3\ -2\ +1\ +1\ -2\ -1\,\underline{|-14}$　∴所求 $=-14$

**【範例十四】**

已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2-1$ 之餘式為 $2x+1$。試選出正確的選項。

(1) $f(0)=1$　(2) $f(1)=3$　(3) $f(x)$ 可能為一次式

(4) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^2-3$　(5) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^3-3$

【107 年學測】

**答**：(2)(3)(5)

**解**：由已知可知 $f(x)=(x^2-1)Q(x)=2x+1$

(1) 不知 $Q(x)$ 無法推論　(2) $f(1)=3$　(3) 正確

(4)(5) 由已知 $f(1)=3$ 且 $f(-1)=-1$，故只有 $4x^4+2x^3-3$ 滿足條件。

**【範例十五】**

若 $a$ 為正整數且方程式 $5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$ 的根都是有理根，

則 $a=$_____。　【106 年學測】

**答**：7

**解**：$\because a\in\mathbb{N}$　∴有理根可能為 $-\frac{1}{5},-1$，又 $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{5}\Rightarrow$ 三根為 $-\frac{1}{5},-1,-1$

$f(-1)=0$，$f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{25}+(a+4)\frac{1}{25}-\frac{1}{5}a+1=0\Rightarrow a=7$

**【範例十六】**

設 $m,n$ 為小於或等於 4 的相異正整數且 $a,b$ 為非零實數。已知函數 $f(x)=ax^m$ 與函數 $g(x)=bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項。

(1) $m,n$ 皆為偶數且 $a,b$ 同號　(2) $m,n$ 皆為偶數且 $a,b$ 異號

(3) $m,n$ 皆為奇數且 $a,b$ 同號　(4) $m,n$ 皆為奇數且 $a,b$ 異號

(5) $m,n$ 為一奇一偶　【106 年學測】

**答**：(1)(3)

**解**：$\begin{cases}y=ax^m\\y=bx^n\end{cases}\Rightarrow ax^m=bx^n\Rightarrow ax^m-bx^n=0$

設 $n<m\Rightarrow ax^n\left(x^{m-n}-\frac{b}{a}\right)=0$，必有 $(0,0)$ 交點，

$\Rightarrow x^{m-n}-\frac{b}{a}=0$ 須有兩解　∴$(m,n)$ 可能為 $(3,1)$ 或 $(4,2)$

$m,n$ 同為奇數或偶數且 $a,b$ 同號

**【範例十七】**

設 $f(x)$ 是首項係數為 1 的實係數二次多項式。請選出正確的選項。何明珍藏重要考題

(1) 若 $f(2)=0$，則 $x-2$ 可整除 $f(x)$　(2) 若 $f(2)=0$，則 $f(x)$ 為整係數多項式

(3) 若 $f(\sqrt{2})=0$，則 $f(-\sqrt{2})=0$　(4) 若 $f(2i)=0$，則 $f(-2i)=0$

(5) 若 $f(2i)=0$，則 $f(x)$ 為整係數多項式　【104 年學測】

**答**：(1)(4)(5)

**解**：(1) 由餘式定理可得 $f(x)$ 有 $x-2$ 的因式　(2) 反例：$f(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})$

(3) 反例：$f(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})$　(4) ∵實係數方程式有共軛虛根

(5) $x=2i$，$x^2+4=0$ ∴$f(x)=x^2+4$

**【範例十八】**

設 $\deg f_n(x)=n\geq1$，$n\in\mathbb{N}$，已知 $f_n(x)$ 在 $x=0$，1，2，3，……，$n-1$ 之值 0，且 $f_n(n)=1$，則

(1) $f_2(x)=\frac{x^2-x}{2}$　(2) $f_3(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$

(3) 對一般的自然數 $n$，$f_n(x)$ 無法確定　(4) $f_4(8)=56$　(5) $f_5(8)=56$。

**答**：(1)(2)(5)

**解**：可令 $f_n(x)=a_nx(x-1)\cdots(x-(n-1))$

$\because f_n(n)=a_n\times n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=1$　∴$a_n=\frac{1}{n!}$

(1) $f_2(x)=\frac{1}{2!}x(x-1)=\frac{x^2-x}{2}$

(2) $f_3(x)=\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)=\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$

(3) $f_n(x)=\frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$　∴$f_n(x)$ 可唯一確定

(4) $f_4(8)=\frac{1}{4!}\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=70$　(5) $f_5(8)=\frac{1}{5!}\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=56$

**【範例十九】**

設 $\alpha,\beta$ 為 $x^2+7x+4=0$ 之二根，則下列選項何者正確？

(1) $\alpha^2+\beta^2=41$　(2) $\alpha^3+\beta^3=-315$　(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{41}{4}$

(4) $(\alpha^2+2\alpha+4)(\beta^2-3\beta+4)=200$　(5) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=-3$

**答**：(1)(3)(4)

**解**：$\because\alpha+\beta=-7,\alpha\beta=4$ 且 $D>0\Rightarrow\alpha<0,\beta<0$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\times4=41$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-7)^3-3\times4\times(-7)=-259$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{41}{4}$

(4) $(\alpha^2+2\alpha+4)(\beta^2-3\beta+4)=(-7\alpha+2\alpha)(-7\beta-3\beta)=50\alpha\beta=200$

(5) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-7-2\sqrt{4}=-11$

**【範例二十】**

設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$（其中 $i^2=-1$）。請問下列哪些選項是多項式方程式 $f(x)=0$ 的根？

(1) $-i$　(2) 0　(3) 1　(4) $-5$　(5) 5　【101 年學測】

**答**：(1)(2)(5)

**解**：$x=i$　∴$x^2=-1$　∴$x^2+1=0$

∴$f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b=(x^2+1)(x^2-5x)=0$　∴四根 $\pm i,0,5$

**【範例二十一】**

考慮多項式 $f(x)=3x^4+11x^2-4$，試選出正確的選項。

(1) $y=f(x)$ 的圖形和 $y$ 軸交點的 $y$ 坐標小於 0　【109年學測】

(2) $f(x)=0$ 有 4 個實根　(3) $f(x)=0$ 至少有一個有理根

(4) $f(x)=0$ 有一根介於 0 與 1 之間　(5) $f(x)=0$ 有一根介於 1 與 2 之間

**答**：(1)(4)

**解**：(1) $f(0)=-4<0$

(2)(3)(4)(5) $f(x)=0\Rightarrow3x^4+11x^2-4=0$　∴$(3x^2-1)(x^2+4)=0$

∴$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm2i$

**【範例二十二】**

設 $f(x)$ 為二次實係數多項式。已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$。請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？

(1) 5　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 條件不足，無法確定　【105 年學測】

**答**：(3)

**解**：令 $f(x)=a(x-2)^2+1$　$f(3)=a\cdot1^2+1=3\Rightarrow a=2$

$f(1)=2(1-2)^2+1=3$

**【範例二十三】**

設 $a,b,c$ 皆為正整數，考慮多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$。請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$ 無正根　(2) $f(x)=0$ 一定有實根

(3) $f(x)=0$ 一定有虛根　(4) $f(1)+f(-1)$ 的值是偶數

(5) 若 $a+c>b+3$，則 $f(x)=0$ 有一根介於 $-1$ 與 0 之間　【105 年學測】

**答**：(1)(4)(5)

**解**：(1) 代入正數必大於 0，無解

(2)(3) 無法判定

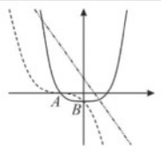
(4) $f(1)+f(-1)=6+2b=2(3+b)$，必為偶數

(5) $f(0)=2>0$　$f(-1)=-a-c+b+3<0$

由堪根定理可知，$-1$ 與 0 之間至少 1 根

**【範例二十四】**

右圖是三個函數的圖形：$f(x)=ax+b$、$g(x)=c(x-c)^3$、$h(x)=dx^4+e$，其中 $y=g(x)$ 與 $y=h(x)$ 交於 $A$、$B$ 兩點，且 $A$、$B$ 兩點分別在 $x$ 軸與 $y$ 軸上，則下列何者正確？




(A) $a>0$　(B) $b>0$　(C) $c>0$　(D) $e=-c^4$　(E) $d>1$

**答**：(B)(D)

**解**：① $f(x)=ax+b$　∵斜率為負 $\Rightarrow a<0$　$y$ 截距為正 $\Rightarrow b>0$

② $g(x)=c(x-c)^3$　∵圖形遞減 $\Rightarrow c<0$

③ ∵$g(x)$，$h(x)$ 交於 $B$ ∴$x=0$ 時，$c(x-c)^3=dx^4+e$　∴$-c^4=e$

④ ∵$y=h(x)$ 過 $A(c,0)$　∴$0=dc^4+e$　∴$0=dc^4-c^4$　∴$d=1$

**【範例二十五】**

下列那一個不等式的解為 $x<1$ 或 $x>3$？

(A) $(x-2)^2>1$　(B) $(x-1)(x+2)^2(x-3)>0$　(C) $\frac{(x-3)(x-1)^5}{x^2+x+2}>0$

(D) $(1-x)(x-3)(x^2+x+1)<0$　(E) $(x^2-1)(x^2-9)(x^2+4x+3)>0$

**答**：(A)(C)(D) 何明珍藏重要考題

**解**：(A) $(x-2)^2-1>0$　∴$x^2-4x+3>0$　∴$(x-1)(x-3)>0$　∴$x>3$ 或 $x<1$

(B) $x>3$ 或 $x<1$ 但 $x\neq-2$　(E) $x<1$ 或 $x>3$ 但 $x\neq-1,-3$

## 學測歸納重點《丙》 數列級數

**【範例一】**

設三正數成等差數列，其和為 30，若三數依序加上 1，6，47 即成為等比數列，則三數中最小的數為_____。

**答**：3

**解**：設三數為 $a-d$，$a$，$a+d$

∴$(a-d)+a+(a+d)=30$　∴$3a=30$　∴$a=10$

∴三數為 $10-d$，$10$，$10+d$　加上 1，6，47 得 $11-d$，$16$，$57+d$ 成等比

∴$16^2=(11-d)\cdot(57+d)$　∴$d^2+46d-371=0$　∴$(d+53)(d-7)=0$

∴$d=7$　∴最小數為 $a-d=10-7=3$

**【範例二】**

等差數列 $\langle a_n\rangle$ 中，$a_1>0$，且前 $n$ 項和為 $S_n$，若 $S_{15}=S_{23}$，則下列何者正確？

(1) 公差小於 0　(2) $a_{18}>0$　(3) $a_{20}<0$　(4) $S_{30}>0$　(5) $S_{40}<0$

**答**：(1)(2)(3)(4)(5)

**解**：(1) ∵$S_{15}=S_{23}$　∴$\frac{15}{2}\times(2a_1+14d)=\frac{23}{2}\times(2a_1+22d)$　∴$a_1=-\frac{37}{2}d$

∵$a_1>0$　∴$d<0$

(2) $a_{18}=a_1+17d=-\frac{3}{2}d>0$　(3) $a_{20}=a_1+19d=\frac{1}{2}d<0$

(4) $S_{30}=\frac{30}{2}\times(2a_1+29d)=15\times(-8d)>0$

(5) $S_{40}=\frac{40}{2}\times(2a_1+39d)=20\times2d<0$

**【範例三】**

設實數組成的數列 $\langle a_n\rangle$ 是公比為 $-0.8$ 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n\rangle$ 是首項為 10 的等差數列。已知 $a_9>b_9$ 且 $a_{10}>b_{10}$。請選出正確的選項　【102 年學測】

(1) $a_9\times a_{10}<0$　(2) $b_{10}>0$　(3) $b_9>b_{10}$　(4) $a_9>a_{10}$　(5) $a_8>b_8$

**答**：(1)(3)

**解**：(1) $a_9=a_1\cdot(-0.8)^8$，$a_{10}=a_1\cdot(-0.8)^9$　∴$a_9$ 與 $a_{10}$ 異號　∴$a_9\cdot a_{10}<0$

(2)(3) ∵$b_1=10$ 且 $a_9>b_9$，$a_{10}>b_{10}$ 何明珍藏重要考題

∵$a_9$ 與 $a_{10}$ 異號　∴$b_9,b_{10}$ 至少有一為負值　∴公差 $d<0$　∴$b_9>b_{10}$

(4)(5) ∵$a_1$ 未知正負(4)(5)不一定成立

**【範例四】**

求級數 $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{6}(k+n^2)\right)=$_____。

**答**：435

**解**：$\sum_{n=1}^{5}\sum_{k=1}^{6}(k+n^2)=\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{6\cdot7}{2}+6n^2\right)=5\cdot\frac{6\cdot7}{2}+6\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6}=435$

**【範例五】**

下列敘述何項正確？

(A) 若 $\langle a_k\rangle$、$\langle b_k\rangle$ 為等比數列，則 $\langle a_k+b_k\rangle$ 為等比數列

(B) 若 $\langle a_k\rangle$ 為等比數列，則 $\langle {a_k}^2\rangle$ 為等比數列

(C) 若 $a_k=5k+3$，則 $\langle 3a_k+2\rangle$ 為等差數列

(D) 若 $2a_{k+1}=a_k+a_{k+2}$，則 $\langle a_k\rangle$ 為等差數列

(E) 若 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2+2n+3$，則 $\langle a_n\rangle$ 為等差數列

**答**：(B)(C)(D)

**解**：(A) 所有等比改等差才對

(C) $3a_k+2=3(5k+3)+2=15k+11$ 為公差 15 的等差數列

(D) $a_{k+2}-a_{k+1}=a_{k+1}-a_k\Rightarrow$ 等差

(E) 因等差數列前 $n$ 項和 $S_n=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

為 $n$ 的二次式但無常數項，若 $S_n=n^2+2n+3$，則 $\langle a_n\rangle$ 不可能為等差

**【範例六】**

設各項都是實數的等差數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 之公差為正實數 $\alpha$。試選出正確的選項。

(1) 若 $b_n=-a_n$，則 $b_1>b_2>b_3>\cdots$　【108 年學測】

(2) 若 $c_n=a_n^2$，則 $c_1<c_2<c_3<\cdots$

(3) 若 $d_n=a_n+a_{n+1}$，則 $d_1,d_2,d_3,\cdots$ 是公差為 $\alpha$ 的等差數列

(4) 若 $e_n=a_n+n$，則 $e_1,e_2,e_3,\cdots$ 是公差為 $\alpha+1$ 的等差數列

(5) 若 $f_n$ 為 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算術平均數，則 $f_1,f_2,f_3,\cdots$ 是公差為 $\alpha$ 的等差數列

**答**：(1)(4)

**解**：(1) ∵$a_1<a_2<a_3<\cdots$

∴$-a_1>-a_2>-a_3>\cdots$

∴$b_1>b_2>b_3>\cdots$

(2) 反例：$-2<-1<0<1<2<\cdots$ 但 $(-2)^2<(-1)^2<0^2<1^2<2^2<\cdots$

(3) $d_1=a_1+a_2=a_1+(a_1+\alpha)=2a_1+\alpha$

$d_2=a_1+a_3=(a_1+\alpha)+(a_1+2\alpha)=2a_1+3\alpha$，公差為 $2\alpha$

(4) 正確

(5) $f_1=a_1$，$f_2=\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_1+a_1+\alpha}{2}=a_1+\frac{\alpha}{2}$

$f_3=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=\frac{a_1+(a_1+\alpha)+(a_1+2\alpha)}{3}=a_1+\alpha$，公差為 $\frac{\alpha}{2}$

**【範例七】**

設 $\langle a_n\rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10}a_k=80$，前五個奇數項的和為 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=120$，請選出首項 $a_1$ 的正確範圍？

(1) $a_1<80$　(2) $80\leq a_1<90$　(3) $90\leq a_1<100$

(4) $100\leq a_1<110$　(5) $110\leq a_1$　【105 年學測】

**答**：(4)

**解**：設首項 $a_1$，公比 $r\Rightarrow\begin{cases}\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=80\cdots\cdots①\\\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2}=120\cdots\cdots②\end{cases}\Rightarrow\frac{①}{②}:r=\frac{-1}{3}$

$a_1=80\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{10}}\approx106.67$

**【範例八】**

每週同一時間點記錄某植物的成長高度，連續五週的數據為

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6,\ a_4=15,\ a_5=31$。

請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子？

(1) $a_{t+1}=3a_t-1$，$t=1,2,3,4$　(2) $a_t=t!$，$t=1,2,3,4,5$

(3) $a_{t+1}=a_t+t^2$，$t=1,2,3,4$　(4) $a_t=2^t-1$，$t=1,2,3,4,5$

(5) $a_{t+1}=ta_t+1$，$t=1,2,3,4$　【104 年學測】

**答**：(3)

**解**：$\Rightarrow a_5=1+1^2+2^2+3^2+4^2$

1　2　6　15　31

1　4　9　16

∴$a_{t+1}=a_t+t^2$，$t=1,2,3,4$，故選(3)

**【範例九】**

第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

(1) 10,000 元　(2) 1,000,000 元　(3) 100,000,000 元

(4) 1,000,000,000 元　(5) 1,000,000,000,000 元　【104 年學測】

**答**：(4)

**解**：30 天的總和為 $\frac{1\times(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1$

$\log2^{30}=30\log2=30\times0.301=9.03=9+0.03$

故為 10 位數字且最高位數字為 1，故選(4)

**【範例十】**

設 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 為等差數列且 $k$ 為實數。若方程組 $\begin{cases}a_1x-a_2y+2a_3z=k+1\\a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5\\a_7x-a_8y+2a_9z=k+9\end{cases}$ 有解，則 $k=$_____。　【106 年學測】

**答**：$-5$

**解**：$\begin{cases}②-①\\③-②\end{cases}:\begin{cases}(a_4-a_1)x-(a_5-a_2)y+2(a_6-a_3)z=-2k-6\\(a_7-a_4)x-(a_8-a_5)y+2(a_9-a_6)z=2k+14\end{cases}$

因為係數成等差，所以兩式相等

$\Rightarrow\begin{cases}3dx-3dy+2(3d)z=-2k-6\\3dx-3dy+2(3d)z=2k+14\end{cases}$　∴$-2k-6=2k+14\Rightarrow k=-5$

**【範例十一】**

遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\geq2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1=1,a_2=2,a_3=5,a_4=12$，則 $a_5=$_____。　【106 年學測】

**答**：25

**解**：$a_2=a_1+f(0)\Rightarrow f(0)=1$；$a_3=a_2+f(1)\Rightarrow f(1)=3$；

$a_4=a_3+f(2)\Rightarrow f(2)=7$

令 $f(x)=ax(x-1)+mx+1$　$\begin{cases}f(1)=3\Rightarrow m=2\\f(2)=7\Rightarrow a=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x(x-1)+2x+1$

∴$f(3)=13\Rightarrow a_5=a_4+f(3)=12+13=25$

版權所有・請勿翻印

# 宏達指考重考精英班

■開課日期：110年1月25日
■開課班系：各類組獨立開班

宏達升學教育機構　台南市中山路147號7樓　電話：06-2201833　網址：www.hdps.com.tw

**【範例十二】**

$\sum_{k=1}^{150}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=$_____。

**答**：$\frac{300}{151}$

**解**：原式 $=\sum_{k=1}^{150}\frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{150}\frac{1}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{150}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=2\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{150}-\frac{1}{151})\right]=2(1-\frac{1}{151})=\frac{300}{151}$

**【範例十三】**

設 $S_n$ 為數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 $n$ 項和，已知 $a_1=1$，且當 $n\ge 2$ 時，$a_n$ 為 $S_n-2^{n-1}$ 與 $2^n-S_{n-1}$ 的等差中項，試問下列敘述哪些正確？

(1) 當 $n\ge 2$ 時，$a_n=\frac{S_n-S_{n-1}+2^{n-1}}{2}$　(2) $a_2=4$

(3) $\log a_n+\log a_{n+2}=2\log a_{n+1}$　(4) $S_n,S_{2n},S_{3n}$ 為等比數列

(5) $\sum_{k=1}^{10}(k\times a_k)=9217$

**答**：(1)(3)(5)

**解**：$n\ge 2$ 時 $2a_n=\left(S_n-2^{n-1}\right)+\left(2^n-S_{n-1}\right)$

(1)(2) $\therefore 2a_n=\left(S_n-S_{n-1}\right)+\left(2^n-2^{n-1}\right)$　$\therefore 2a_n=a_n+2^{n-1}\Rightarrow 2^{n-1}$

(3) $\because a_n\cdot a_{n+2}=\left(a_{n+1}\right)^2\Rightarrow\log a_n+\log a_{n+1}=2\log a_{n+1}$

(4) $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 成等比

(5) $\sum_{k=1}^{10}(k\times a_k)=1\times a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}$

$=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+10\cdot 2^9$

令 $S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+10\cdot 2^9$

$-)2S=\quad +1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+9\cdot 2^9+10\cdot 2^{10}$

何明珍藏重要考題

$-S=1+2+2^2+\cdots 2^9-10\cdot 2^{10}=\left(2^{10}-1\right)-10\cdot 2^{10}=-9217$

$\therefore S=9217$

## 學測歸納重點《丁》　指數與對數

**【範例一】**

令 $a=2.6^{10}-2.6^9$，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$，$c=\frac{2.6^{11}-2.6^9}{2}$。

請選出正確的大小關係　【102 年學測】

(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$

**答**：(4)

**解**：$a=2.6^9\cdot(2.6-1)=1.6\times 2.6^9$，$b=2.6^{10}\cdot(2.6-1)=1.6\times 2.6^{10}$

$c=2.6^9\cdot\left(\frac{2.6^2-1}{2}\right)=\frac{3.6\times 1.6}{2}\times 2.6^9=1.8\times 1.6\times 2.6^9$ $\therefore b>c>a$

**【範例二】**

設正實數 $b$ 滿足 $(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$。試選出正確的選項。

(1) $1\le b\le\sqrt{10}$　(2) $\sqrt{10}\le b\le 10$　(3) $10\le b\le 10\sqrt{10}$

(4) $10\sqrt{10}\le b\le 100$　(5) $100\le b\le 100\sqrt{10}$　【108 年學測】

**答**：(4)

**解**：$2\log b+2+\log b=7\Rightarrow 3\log b=\frac{5}{3}\Rightarrow b=10^{\frac{5}{3}}$

$\because 10^{\frac{3}{2}}\le 10^{\frac{5}{3}}\le 10^2\Rightarrow 10\sqrt{10}\le b\le 100$

**【範例三】**

設 $a,b,c$ 為實數且滿足 $\log a=1.1$、$\log b=2.2$、$\log c=3.3$。試選出正確的選項。

(1) $a+c=2b$　(2) $1<a<10$　(3) $1000<c<2000$

(4) $b=2a$　(5) $a,b,c$ 成等比數列　【109 年學測】

**答**：(3)(5)

**解**：$\log a=1.1\Rightarrow a=10^{1.1}$

$\log b=2.2\Rightarrow b=10^{2.2}$

$\log c=3.3\Rightarrow c=10^{3.3}$

(1) $a+c\ne 2b$　(2) $a=10^{1.1}>10$

(3) $10^3<10^{3.3}<10^{3.3.01}\Rightarrow 1000<c<2000$

(4) $b=10^{2.2}=\left(10^{1.1}\right)^2=a^2$　(5) $ac=10^{4.4}=b^2$　$\therefore a,b,c$ 成等比

**【範例四】**

下列方程式實數解的個數，哪些為正確選項？

(A) 方程式 $3-\log x=0$，有 0 個實數解

(B) 方程式 $x-\log x=0$，有 1 個實數解

(C) 方程式 $x+\log x=0$，有 1 個實數解

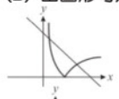
(D) 方程式 $x-3+|\log x|=0$，有 2 個實數解

(E) 方程式 $x^2+\log|x|=0$，有 2 個實數解

**答**：(C)(D)(E)

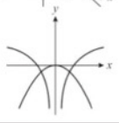
**解**：(A) 恰有 1 實根　(B) 由圖形可知無實根　(C) 由圖形可知恰有 1 實根

(D) $\begin{cases}y=|\log x|\\ y=3-x\end{cases}$　由圖形可知恰有 2 實根



何明珍藏重要考題

(E) $\begin{cases}y=\log|x|\\ y=-x^2\end{cases}$　由圖形可知恰有 2 實根



**【範例五】**

試問有多少個整數 $x$ 滿足 $10^9<2^x<9^{10}$？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個　【107 年學測】

**答**：(2)

**解**：$\begin{cases}10^9<2^x\\ 2^x<9^{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9<x\log 2\\ x\log 2<10\log 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{9}{\log 2}=29.9\sim\\ x<\frac{10\log 9}{\log 2}=31.4\sim\end{cases}$

取交集為 $29.9\sim<x<31.4\sim$，故 $x=30,31$

**【範例六】**

已知坐標平面上三點 $(3,\log 3)$、$(6,\log 6)$ 與 $(12,y)$ 在同一直線上，

則 $y=\log$ _____。　【107 年學測】

**答**：24

**解**：$\frac{\log 6-\log 3}{6-3}=\frac{y-\log 6}{12-6}\Rightarrow 2\log 2=y-\log 6\Rightarrow y=2\log 2+\log 6=\log 24$

**【範例七】**

設 $\alpha$ 為方程式 $\log_3 x=-x+3$ 的實根，$\beta$ 為方程式 $3^x=-x+3$ 的實根，

則 $(\log_3\alpha)+3^\beta=$_____。　【2010TRML】

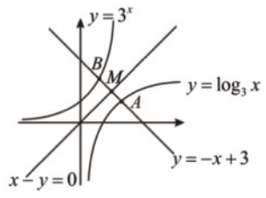
**答**：3

**解**：(1) $\because\alpha$ 為 $\log_3 x=-x+3$ 的實根

$\therefore\begin{cases}y=\log_3 x\\ y=-x+3\end{cases}$　交點為 $A(\alpha,\log_3\alpha)$

(2) $\because\beta$ 為 $3^x=-x+3$ 的實根

$\therefore\begin{cases}y=3^x\\ y=-x+3\end{cases}$　交點為 $B(\beta,3^\beta)$




$\therefore A,B$ 中點為 $x-y=0$ 與 $y=-x+3$ 交點 $M(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$　$\therefore\frac{\log_3\alpha+3^\beta}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\log_3\alpha+3^\beta=3$

**【範例八】**

設 $a,b,x$ 皆為正整數且滿足 $a\le x\le b$ 及 $b-a=3$。若用內插法從 $\log a,\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$\log x\approx\frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)+\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)$，

則 $x$ 的值為_____。　【106 年學測】

**答**：47

**解**：$\begin{cases}\log a=1+2\log 3-\log 2=\log 45\\ \log b=4\log 2+\log 3=\log 48\end{cases}$

$\because$ 內分點比例 $2:1$　$\therefore\frac{b-x}{x-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow 3x=2b+a=2\times 48+45=141\Rightarrow x=47$

**【範例九】**

放射性物質的半衰期 $T$ 定義為每經過時間 $T$，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 $A,B$，開始紀錄時容器中物質 $A$ 的質量為物質 $B$ 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 $A$ 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 $B$ 的半衰期為幾小時？

(1) 8 小時　(2) 10 小時　(3) 12 小時　(4) 15 小時　(5) 20 小時　【105 年學測】

**答**：(1)

**解**：$A$ 經過了 $120\div 7.5=16$ 次半衰期

原先 $A$ 的質量為 $B$ 的兩倍，120 小時後質量相同

所以 $B$ 只經過 $16-1=15$ 次半衰期

$120\div 15=8$　$\therefore B$ 的半衰期為 8 小時

**【範例十】**

若 $(a,b)$ 是對數函數的 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？　【98 年指考數乙】

(1) $(1,0)$　(2) $(10a,b+1)$　(3) $(2a,2b)$　(4) $(\frac{1}{a},1-b)$　(5) $(a^2,2b)$

**答**：(1)(2)(5)

**解**：(1) 成立　(2) $b+1=\log 10a=1+\log a$　$\therefore b=\log a$ (合)

(3) $2b=\log 2a$ 無法滿足 $b=\log a$

(4) $1-b=\log\frac{1}{a}=-\log a$ 無法滿足 $b=\log a$

(5) $2b=\log a^2$　$\therefore 2b=2\log a$　$\therefore b=\log a$ (合)

**【範例十一】**

設直線 $x=k$ 與 $y=\log_5 x$、$y=\log_5(x+4)$ 分別相交，且已知兩交點的距離為 0.5，若 $k=a+\sqrt{b}$，其中 $a,b$ 均為正整數，試問 $a+b$ 為_____。

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9　(E) 10　【AMC12-1997】

**答**：(A)

**解**：兩交點分別為 $(k,\log_5 k)$ 與 $\left(k,\log_5(x+4)\right)$，今知兩點距離為 0.5，

所以 $\log_5(k+4)-\log_5 k=0.5$，即 $\frac{k+4}{k}=\sqrt{5}$

所以 $k+4=\sqrt{5}k$，即 $k=\frac{4}{\sqrt{5}-1}=1+\sqrt{5}=a+\sqrt{b}$，所以 $a+b=1+5=6$

**【範例十二】**

設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(A) $(-a)^7>(-a)^9$　(B) $b^{-9}>b^{-7}$　(C) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$

(D) $\log_a 1>\log_b 1$　(E) $\log_a b\ge\log_b a$　【102 年學測】

**答**：(A)(B)

**解**：(A) $\because a>1$　$\therefore a^7<a^9$　$\therefore(-a)^7>(-a)^9$

(B) $\because 0<b<1$　$\therefore b^9<b^7$　$\therefore b^{-9}>b^{-7}$

(C) $\because\log_{10}a>\log_{10}b$　$\therefore\log_{10}\frac{1}{a}<\log_{10}\frac{1}{b}$

(D) $\log_a 1=\log_b 1=0$

(E) 反例：取 $a=2$，$b=\frac{1}{4}$　$\therefore\log_a b=-2$，$\log_b a=-\frac{1}{2}$　$\therefore\log_a b<\log_b a$

**【範例十三】**

若 $47^{100}$ 為 168 位數，則：

(1) $47^{30}$ 為_____位數。

(2) $\frac{1}{47^{30}}$ 在小數點第_____位開始出現不為 0 的數字。

**答**：(1) 51　(2) 51

**解**：$167\le\log 47^{100}<168$　$\Rightarrow 1.67\le\log 47<1.68$

何明珍藏重要考題

(1) $30\times 1.67\le 30\log 47<30\times 1.68\Rightarrow 50.1\le\log 47^{30}<50.4$　$\therefore$ 51 位數

(2) $-30\times 1.67\ge -30\log 47>-30\times 1.68\Rightarrow -50.1\ge\log 47^{-30}>-50.4$

$\Rightarrow -51+0.9\ge\log\frac{1}{47^{30}}>-51+0.6$　$\therefore$第 51 位始不為 0

**【範例十四】**

小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率爲 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳_____元。　【104 年學測】

**答**：8181

**解**：若是單利計算每年應還利息為 $3000000\times 3\%=90000$

三年需繳總利息為 $3\times 90000=270000$

若為複利計算三年本利合為 $3000000\times(1+3\%)^2=3278181$

三年需繳總利息為 $3278181-3000000=278181$

單利比複利可少繳 $278181-270000=8181$ 元

**【範例十五】**

在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？

(1) 9 千隻 (2) 108 千隻 (3) 2200 千隻 (4) 3200 千隻 (5) 32000 千隻　【99 年學測】

**答**：(3)

**解**：所求 $=1.08^{100}$ (千隻)

$\because\log 1.08^{100}=100\cdot\log 1.08=100\cdot(\log 108-\log 100)$

$=100(3\log 3+2\log 2-2)=3.33$

何明珍藏重要考題

$=3+0.33=\log 10^3+\log 2.14=\log 2140$

$\therefore(1.08)^{100}=2140\approx 2200$ (千隻)

**【範例十六】**

坐標平面上，在函數圖形 $y=2^x$ 上，標示 $A,B,C,D$ 四個點，其 $x$ 坐標分別為 $-1,0,1,2$。請選出正確的選項。

(1) 點 $B$ 落在直線 $AC$ 下方

(2) 在直線 $AB$、直線 $BC$、直線 $CD$ 中，以直線 $CD$ 的斜率最大

(3) $A,B,C,D$ 四個點，以點 $B$ 最靠近 $x$ 軸

(4) 直線 $y=2x$ 與 $y=2^x$ 的圖形有兩個交點

(5) 點 $A$ 與點 $C$ 對稱於 $y$ 軸　【104 年學測】

**答**：(1)(2)(4)

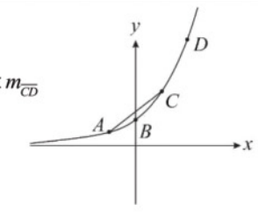
**解**：(1) $\because y=2^x$ 為凹口向上 $\Rightarrow$ $B$ 點在 $\overline{AC}$ 下方

(2) $\because y=2^x$ 為凹口向上且遞增 $\Rightarrow m_{\overline{AB}}<m_{\overline{BC}}<m_{\overline{CD}}$

(3) 應為 $A$ 點

(4) 有 2 個交點 $(1,2)$，$(2,4)$

(5) 由圖可知沒有對稱 $y$ 軸




**【範例十七】**

一份試卷共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？

(1) $10^{-5}$　(2) $10^{-6}$　(3) $10^{-7}$　(4) $10^{-8}$　(5) $10^{-9}$　【107 年學測】

**答**：(3)

**解**：$p=\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=5^{-10}\Rightarrow\log p=\log 5^{-10}=-10\log 5=-6.990$

$\log p=-6.990\approx -7=\log 10^{-7}$　$\therefore p=5^{-10}\approx 10^{-7}$

## 學測歸納重點《戊》　排列組合

**【範例一】**

某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。

從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：

$A$ 為同時有手機與平板電腦的人數

$B$ 為有手機，但沒有平板電腦的人數

$C$ 為沒有手機，但有平板電腦的人數

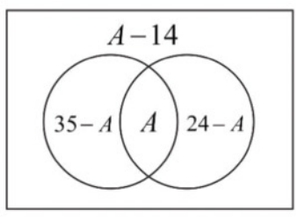
$D$ 為沒有手機，也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項。　【104 年學測】

(1) $A>B$　(2) $A>C$　(3) $B>C$　(4) $B>D$　(5) $C>D$

**答**：(2)(3)(4)

**解**：$\therefore\begin{cases}B=35-A\ge 0\\ C=24-A\ge 0\Rightarrow 14\le A\le 24\\ D=A-14\ge 0\end{cases}$




(1) $A-B=2A-35$ 不一定大於 0

(2) $A-C=2A-24>0\Rightarrow A>C$

(3) $B-C=11>0\Rightarrow B>C$

(4) $B-D=49-2A>0\Rightarrow B>D$

(5) $C-D=10-2A<0$　$\therefore C<D$

**【範例二】**

小燦預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽。如果陽台上的空間最多能種 8 盆，可以不必擺滿，並且每種花至少一盆，則小燦買盆栽的方法共有_____種。　【104 年學測】

**答**：70

**解**：四種不必擺滿 $\Rightarrow a+b+c+d\le 8$

且每株至少一盆 $\Rightarrow a+b+c+d\le 4$ ($a,b,c,d$ 各給 1)

令未擺的盆數為 $w$ $\Rightarrow a+b+c+d+w=4\Rightarrow H_4^5=C_4^{5+4-1}=C_4^8=\frac{8!}{4!4!}=70$

**【範例三】**

某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 $x$ 人，數學及格但英文不及格的有 $y$ 人。請選出正確的選項。

(1) $x+y=39$　(2) $y\le 11$

(3) 三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人

(4) 三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人

(5) 三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人　【106 年學測】

**答**：(2)(5)

**解**：(1) $x+y=34$

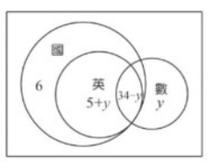
(2) 英或數及格：$39+y\le 50$

又 $y\ge 0$　$\therefore 0\le y\le 11$

(3)(4)(5) 至少有一科不及格的學生有 $50-x$ 人

$\because 50-x=50-(34-y)=y+16$，

所以至少一科不及格的學生最多 27 人、最少 16 人




**【範例四】**

廚師買了豬、雞、牛三種肉類食材以及白菜、豆腐、香菇三種素類食材。若廚師想用完這六種食材作三道菜，每道菜可以只用一種食材或用多種食材，但每種食材只能使用一次，且每道菜一定要有肉，試問食材的分配共有幾種方法？

(1) 3　(2) 6　(3) 9　(4) 18　(5) 27　【108 年學測】

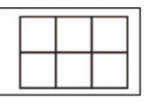
**答**：(5)

**解**：白菜、豆腐、香菇皆可自由選擇分配入豬肉、雞肉、牛肉料理中

故選擇方式有 $3\times 3\times 3=27$ 種

**【範例五】**

有一個兩列三行的表格如右圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有_____種。　【99 年學測】



**答**：432

**解**：1,2 同一行方法：$3\times(2!\times 4!)=144$

1,2 同一列方法：$2\times(P_2^3\times 4!)=288$　$\therefore$ 方法共有 $144+288=432$

版權所有・請勿翻印

# 宏達高三指考加強班

■單機課程，報名後立即上課
■考前衝刺班：5月31日至6月30日

宏達升學教育機構　台南市中山路147號7樓　電話：06-2201833　網址：www.hdps.com.tw




**【範例六】**

一列火車共十節車廂：
(1) 若指定其中三節准許吸煙，則有_____種指定方法。
(2) 若此三節車廂兩兩不相銜接方法_____種。

**答**：(1) 120　(2) 56

**解**：(1) $C_3^{10}=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$ 種　(2) □ □ □ □□□□□□□ 所求 $=C_3^8=56$ 種

**【範例七】**

1，2，3，…，20 中取出 3 數，則
(1) 三個數乘積為偶數者方法有_____種。
(2) 三個數乘積為 4 倍數者方法有_____種。
(3) 三個數乘積為 8 倍數者方法有_____種。

**答**：(1) 1020　(2) 795　(3) 560

**解**：(1) $C_3^{20}-C_3^{10}=1020$ 種

(2) $C_3^{10}+C_2^{10}C_1^{10}+C_1^5\cdot C_2^{10}=795$ 種

(3) $C_3^{10}+(C_2^{10}-C_2^5)\cdot C_1^{10}+C_1^2\cdot C_2^{10}=560$ 種

**【範例八】**

從 1 到 9 的自然數中，任取三個數，試就以下條件，求其方法數：
(1) 三數之和為奇數。　(2) 三數之積為 3 的倍數。　(3) 三數成等差數列。

**答**：(1) 40　(2) 64　(3) 16

**解**：(1) 3 個奇數或 2 偶 1 奇　∴有 $C_3^5+C_1^5C_2^4=40$ 組

(2) 所求＝全部－不為 3 倍數者 $=C_3^9-C_3^6=64$

(3) ∵ $a,b,c$ 成等差　則 $a+c=2b$　∴ $a,c$ 同時為偶數或同時為奇數

已知有 4 個偶數，5 個奇數　∴等差數列共有 $C_2^4+C_2^5=16$ 種

**【範例九】**

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
（甲）每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
（乙）連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？
(1) 52　(2) 60　(3) 68　(4) 76　(5) 84　【106 年學測】

**答**：(2)

**解**：麵食重複一次有 2 種，排列數 $C_1^2\times C_3^3\times2!\times\frac{3!}{2!}=12$

飯食重複一次有 2 種，排列數

$C_1^2\left(C_2^4\times\frac{3!}{2!}\times2!-C_2^3\times2!\times2!\right)=48$，所以共 $12+48=60$ 種

**【範例十】**

滿足 $9\le x+y+z\le15$ 之正奇整數解有_____組。

**答**：74

**解**：$9\le(2m+1)+(2n+1)+(2p+1)\le15$　∴ $3\le m+n+p\le6$，$m,n,p\ge0$

所求 $=H_6^4-H_2^4=C_6^9-C_2^5=74$

**【範例十一】**

將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。
(1) 55　(2) 66　(3) 132　(4) 198　(5) 253　【102 年學測】

**答**：(2)

**解**：由已知得紅色籃子須裝偶數個雞蛋

令紅、黃、綠三個籃子裝的雞蛋各為 $(2x+2),(2y+1),(2z+1)$ 個

$\therefore(2x+2)+(2y+1)+(2z+1)=24$

$\therefore x+y+z=10\rightarrow$ 非負整數解有 $H_{10}^3=C_{10}^{12}=66$ 種

**【範例十二】**

高二有 $m$ 位轉學生，將分到 $n$ 個不同的班級，試回答下列問題。
(1) $m=4$，$n=6$，每班至多分一位學生時，則分法有_____種。
(2) $m=6$，$n=4$，每班至少分一位學生時，則分法有_____種。

**答**：(1) 360　(2) 1560

**解**：(1) $P_4^6=360$ 種

(2) $(3,1,1,1)+(2,2,1,1)\Rightarrow\frac{C_3^6\cdot C_1^3\cdot C_1^2\cdot C_1^1}{3!}\times4!+\frac{C_2^6\cdot C_2^4\cdot C_1^2\cdot C_1^1}{2!\cdot2!}\times4!=1560$ 種

**【範例十三】**

設 $(kx^3-\frac{1}{x^2})^5$ 中 $x^5$ 係數為 80，則：
(1) 實數 $k$ 之值為_____。　(2) 常數項為_____。

**答**：(1) 2　(2) $-40$

**解**：一般項 $C_a^5(kx^3)^{5-a}(-\frac{1}{x^2})^a=C_a^5k^{5-a}(-1)^ax^{15-5a}$ 何明珍藏重要考題

(1) $15-5a=5$ ∴ $a=2$　∴ $C_2^5k^3=80$　∴ $k^3=8$　∴ $k=2$

(2) $15-5a=0$ ∴ $a=3$　∴常數項為 $C_3^5 2^2(-1)^3=-40$

**【範例十四】**

考慮每個元(或稱元素)只能是 0 或 1 的 $2\times3$ 階矩陣，且它的第一列與第二列不相同且各列的元素不能全為零，這樣的矩陣共有_____個。　【105 年學測】

**答**：42

**解**：第一列有 $2^3-1=7$ 種可能(扣掉 0,0,0)

第二列不能與第一列相同，有 $7-1=6$ 種可能

所有的組合為 $6\times7=42$ 種

## 學測歸納重點《己》　機率

**【範例一】**

一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為_____。（化成最簡分數）
【106 年學測】

**答**：$\frac{9}{64}$

**解**：① (上,下,左,右) $\Rightarrow\left(\frac14\right)^4\times4!=\frac{24}{256}$　② (左,左,右,右) $\Rightarrow\left(\frac14\right)^4\times\frac{4!}{2!2!}=\frac{6}{256}$

③ (上,上,下,下) $\Rightarrow\left(\frac14\right)^4\times\frac{4!}{2!2!}=\frac{6}{256}$　∴ $\frac{24}{256}+\frac{6}{256}+\frac{6}{256}=\frac{9}{64}$

**【範例二】**

如 高三甲班共有位 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有男也有女的機率為_____。　【100 年學測】

**答**：$\frac{90}{119}$

**解**：$P=\frac{C_2^{20}C_1^{15}+C_1^{20}C_2^{15}}{C_3^{35}}=\frac{90}{119}$

**【範例三】**

有兩公正骰子，今將其中一個的 4 點換成 3 點，而將另一個的 3 點換成 4 點，則同時擲兩骰子一次，其點數和為奇數的機率為_____。
(A) $\frac13$　(B) $\frac49$　(C) $\frac12$　(D) $\frac59$　(E) $\frac{11}{18}$　【1997AMC12】

**答**：(D)

**解**：第一個骰子奇數機率為 $\frac46=\frac23$，偶數機率為 $\frac26=\frac13$

第二個骰子奇數機率為 $\frac26=\frac13$，偶數機率為 $\frac46=\frac23$

∴兩個骰子點數和為奇數機率為 $\frac23\times\frac23+\frac13\times\frac13=\frac59$

**【範例四】**

投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 $a,b,c$。在 $b$ 為奇數的條件下，行列式 $\begin{vmatrix}a&b\\b&c\end{vmatrix}>0$ 的機率為_____。(化成最簡分數)　【105 年學測】

**答**：$\frac{19}{36}$

**解**：$ac>b^2$

① $b=1$ 時 $ac>1$，共有 $6\times6-1=35$ 種

② $b=3$ 時 $ac>9$

| $a$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 5,6 | 4～6 | 3～6 | 2～6 | 2～6 |

共有 $2+3+4+5+5=19$ 種　何明珍藏重要考題

③ $b=5$ 時 $ac>25$

| $a$ | 5 | 6 |
|---|---|---|
| $c$ | 6 | 5,6 |

，共有 $1+2=3$ 種

∴所求機率為 $\frac{35+19+3}{6\times3\times6}=\frac{57}{108}=\frac{19}{36}$

**【範例五】**

袋中有 9 個相同的球，分別標示 1 號、2 號、……、9 號。今自袋中隨機一次取四球：(1) 求取出之球的標號和為奇數的機率為_____。
(2) 求取出之球的標號乘積為偶數的機率為_____。

**答**：(1) $\frac{10}{21}$　(2) $\frac{121}{126}$

**解**：(1) 奇數：1,3,5,7,9 共 5 個　偶數：2,4,6,8 共 4 個

標號和為奇數必為三奇數一偶數或一奇數三偶數

機率 $=\frac{C_3^5\times C_1^4+C_1^5\times C_3^4}{C_4^9}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

(2) 只要不是 4 個標號均為奇數，則標號乘積必為偶數機率

$=1-\frac{C_4^5}{C_4^9}=1-\frac{5}{126}=\frac{121}{126}$

**【範例六】**

甲、乙、丙三所高中的一年級分別有 3,4,5 個班級。從這 12 個班級中隨機選取一班參加國文抽考，再從未被抽中的 11 個班級中隨機選取一班參加英文抽考。則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？何明珍藏重要考題
(1) 21%　(2) 23%　(3) 25%　(4) 27%　(5) 29%　【98 年學測】

**答**：(5)

**解**：所求機率 $=\frac{C_2^3+C_2^4+C_2^5}{C_2^{12}}=\frac{3+6+10}{66}=\frac{19}{66}\div0.29=29\%$

**【範例七】**

某公司規定員工可在一星期（七天）當中選擇兩天休假。若甲、乙兩人隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，試問一星期當中發生兩人在同一天休假的機率為何？
(1) $\frac13$　(2) $\frac{8}{21}$　(3) $\frac37$　(4) $\frac{10}{21}$　(5) $\frac{11}{21}$　【107 年學測】

**答**：(5)

**解**：$p=\frac{7\times6\times5+C_6^7}{C_6^7C_6^7}=\frac{210+21}{21\times21}=\frac{11}{21}$

**【範例八】**

從 0 到 2007 中任意的選出整數 $a,b,c,d$ 它們不必都相異. 問 $ad-bc$ 為偶數的機率是多少？
(A) $\frac38$　(B) $\frac{7}{16}$　(C) $\frac12$　(D) $\frac{9}{16}$　(E) $\frac58$　【2007AMC12】

**答**：(E)

**解**：0 到 2007 中任取一數偶數與奇數機率均為 $\frac12$，又 $ad-bc$ 為偶數之條件如下

① $ad$ 為奇數，$bc$ 為奇數　⇒機率為 $(\frac12\cdot\frac12)\cdot(\frac12\cdot\frac12)=\frac{1}{16}$ 何明珍藏重要考題

② $ad$ 為偶數，$bc$ 為偶數　⇒機率為 $(1-\frac14)\cdot(1-\frac14)=\frac{9}{16}$

∴所求機率為 $\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac58$

**【範例九】**

有一按鈕遊戲機，每投幣一枚，可按遊戲機三次。第一次按下會出現黑色或白色的機率各為 $\frac12$；第二或第三次按下，出現與前一次同色的機率為 $\frac13$，不同色的機率為 $\frac23$。今某甲投幣一枚後，按三次均出現同色的機率為_____。（化為最簡分數）
【106年學測】

**答**：$\frac19$

**解**：$2\times\left(\frac12\times\frac13\times\frac13\right)=\frac19$

**【範例十】**

有兩組供機器運作的配件 $A$、$B$，其單獨發生故障的機率分別為 0.1, 0.15。只有當 $A$, $B$ 都發生故障時，此機器才無法運作。$A$、$B$ 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，但若後面故障則不會影響前面的故障情形；若用並列方式，則故障情形互不影響。若考慮以下三種情形：
(一) 將 $B$ 串接於 $A$ 之後　(二) 將 $A$ 串接於 $B$ 之後　(三) 將 $A$, $B$ 獨立並列
在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為 $p_1$、$p_2$、$p_3$。
請選出正確的選項。
(1) $p_1>p_2>p_3$　(2) $p_2>p_1>p_3$　(3) $p_3>p_2>p_1$
(4) $p_3>p_1>p_2$　(5) $p_1=p_2>p_3$　【104 年學測】

**答**：(2)

**解**：由於兩個都故障才會停止，且若前面故障，後面也會跟著故障

(一) $p_1=A$ 故障的機率 $=0.1$　(二) $p_2=B$ 故障的機率 $=0.15$

(三) $p_3=0.1\times0.15=0.015$　$\Rightarrow p_2>p_1>p_3$，故選(2)

**【範例十一】**

不透明袋中有 3 白 3 紅共 6 個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。甲、乙、丙、丁、戊 5 人依甲第一、乙第二、……、戊第五的次序，從袋中各取一球，取後不放回。試問在甲、乙取出不同色球的條件下，戊取得紅球的機率為_____。（化為最簡分數）　【104 年學測】

**答**：$\frac12$

**解**：∵甲、乙兩人取出不同色的球　∴袋中剩下 2 白 2 紅

∴戊取得紅球的機率同丙取得紅球的機率即 $\frac24=\frac12$

**【範例十二】**

袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？何明珍藏重要考題
(1) $\frac13$　(2) $\frac{5}{12}$　(3) $\frac12$　(4) $\frac35$　(5) $\frac23$　【102 年學測】

**答**：(3)

**解**：$P(\text{丙抽到白球}|\text{甲,乙抽到同色球})=\frac{\frac35\cdot\frac24\cdot\frac13+\frac25\cdot\frac14\cdot\frac33}{\frac35\cdot\frac24+\frac25\cdot\frac14}=\frac{\frac{12}{60}}{\frac{8}{20}}=\frac{\frac15}{\frac25}=\frac12$

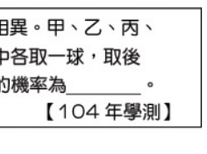
**【範例十三】**

某醫院有 0.5% 的病人患癌症，患癌症的人經過某種檢驗發現有癌症可疑的為 0.95，不患癌症的病人經過同樣的檢驗發現有癌症可疑的為 0.05，今有一病人經檢驗後認為其可能患有癌症，則其準確性為_____。

**答**：$\frac{19}{218}$

**解**：$P$（實際有癌症|檢驗有癌症）$=\frac{P(\text{實際有癌症}\cap\text{檢驗有癌症})}{P(\text{檢驗有癌症})}$

$=\frac{\frac{0.5}{100}\times\frac{95}{100}}{\frac{0.5}{100}\times\frac{95}{100}+\frac{99.5}{100}\times\frac{5}{100}}=\frac{475}{475+4975}=\frac{19}{19+199}=\frac{19}{218}$




**【範例十四】**

甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 $A,B,C,D$ 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 $A,B,C,D$ 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 $B$ 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。
(1) $A$ 抽到甲的鑰匙的機率大於 $C$ 抽到甲的鑰匙的機率
(2) $C$ 抽到甲的鑰匙的機率大於 $D$ 抽到甲的鑰匙的機率
(3) $A$ 抽到乙的鑰匙的機率大於 $B$ 抽到乙的鑰匙的機率
(4) $B$ 抽到丙的鑰匙的機率大於 $C$ 抽到丙的鑰匙的機率
(5) $C$ 抽到甲的鑰匙的機率大於 $C$ 抽到乙的鑰匙的機率　【105 年學測】

**答**：(4)(5)

**解**：(1) $P(A\text{抽到甲})=\frac14$，$P(C\text{抽到甲})=\frac34\times\frac22\times\frac12=\frac38$

(2) $P(D\text{抽到甲})=\frac34\times\frac22\times\frac12\times\frac11=\frac38$

(3) $P(A\text{抽到乙})=\frac14$，$P(B\text{抽到乙})=\frac14\times\frac13+\frac24\times\frac12=\frac13$

(4) $P(B\text{抽到丙})=\frac14\times\frac13+\frac24\times\frac12=\frac13$，

$P(C\text{抽到丙})=\frac14\times\frac23\times\frac12+\frac24\times\frac12\times\frac12=\frac{5}{24}$

(5) $P(C\text{抽到甲})=\frac34\times\frac22\times\frac12=\frac38$，$P(C\text{抽到乙})=\frac14\times\frac23\times\frac12+\frac24\times\frac12\times\frac12=\frac{5}{24}$

**【範例十五】**

從 1,2,3,4,5,6,7 這七個數字中隨機任取兩數。試選出正確的選項。
(1) 其和大於 10 的機率為 $\frac17$　(2) 其和小於 5 的機率為 $\frac17$
(3) 其和為奇數的機率為 $\frac47$　(4) 其差為偶數的機率為 $\frac57$
(5) 其積為奇數的機率為 $\frac27$　【108 年學測】

**答**：(3)(5)

**解**：(1) 大於 10 有 (4,7)、(5,6)、(5,7)、(6,7) 共 4 種　∴所求 $=\frac{4}{C_2^7}=\frac{4}{21}$

(2) 小於 5 有 (1,2)、(1,3) 共 2 種，所求 $=\frac{2}{C_2^7}=\frac{2}{21}$

(3) 所求 $=\frac{C_1^4C_1^3}{C_2^7}=\frac{12}{21}=\frac47$

(4) 兩數均偶或均奇，所求 $=\frac{C_2^3+C_2^4}{C_2^7}=\frac{9}{21}=\frac37$

(5) 兩數均為奇數，所求 $=\frac{C_2^4}{C_2^7}=\frac{6}{21}=\frac27$

## 學測歸納重點《庚》　統計

**【範例一】**

一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。老師決定以下列方式調整成績：原始成績為 $x$ 分的學生，新成績調整為 $40\log_{10}(\frac{x+1}{10})+60$ 分(四捨五入到整數)。請選出正確的選項。
(1) 若某人原始成績是 9 分，則新成績為 60 分
(2) 若某人原始成績超過 20 分，則其新成績超過 70 分
(3) 調整後全班成績的全距比原始成績的全距大
(4) 已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，則小文的新成績仍然等於調整後全班成績的中位數
(5) 已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，則小美的新成績仍然等於調整後全班成績的平均(四捨五入到整數)　【105 年學測】

**答**：(1)(2)(4)

**解**：(1) $40\log_{10}\left(\frac{9+1}{10}\right)+60=60$

(2) $40\log_{10}\left(\frac{20+1}{10}\right)+60>72$ 必超過 70 分

(3) 反例：所有人成績相同，全距不變

(4) 皆為遞增，順序不變

(5) 非線性轉換

版權所有・請勿翻印

110年最新版 何明老師主筆

# 學測數學科歸納總整理

台北何明數學・台南宏達升學教育機構提供 台南市中山路147號7樓 電話：06－2201833

## 學測歸納重點《辛》 相關係數與迴歸直線

**【範例一】**

設有一組資料 $(x_i,y_i)$，算出平均數分別為 $\mu_x=65$，$\mu_y=70$，標準差分別為 $\sigma_x=10$，$\sigma_y=5$。若已知 $y$ 對 $x$ 的迴歸直線過 $(75,73)$，求 $x$ 與 $y$ 的相關係數。

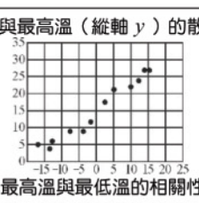
**答**：$\frac{3}{5}$

**解**：$\because$ 迴歸線過 $(\mu_x,\mu_y)=(65,70)$，又過 $(75,73)$

$\therefore$ 斜率 $=\frac{73-70}{75-65}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$　　$\therefore \frac{3}{10}=r_{xy}\cdot\frac{5}{10}\Rightarrow r_{xy}=\frac{3}{5}$

**【範例二】**

圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 $x$）與最高溫（縱軸 $y$）的散佈圖。



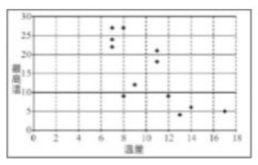
今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散佈圖。試依此選出正確的選項。

(1) 最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
(2) 最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
(3) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
(4) 最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
(5) 最高溫與溫差為零相關　【106 年學測】

**答**：(4)

**解**：設 $x_i$ 表溫差，$y_i$ 表最高溫

| $x_i$ | 17.5 | 13 | 14 | 12 | 8 | 9 | 11 | 11 | 7 | 7 | 8 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5 | 4 | 6 | 9 | 9 | 12 | 18 | 21 | 22 | 24 | 27 | 27 |



由圖可知，整體呈現負相關，且分布變廣所以相關性較弱

**【範例三】**

某超商依據過去的銷售紀錄，冬天平均氣溫在 6°C 到 24°C 時，每日平均售出的咖啡數量與當天的平均氣溫之相關係數為 $-0.99$，部分紀錄如下表。

| 平均氣溫（°C） | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均售出量（杯） | 512 | 437 | 361 | 279 | 203 | 135 |

某日平均氣溫為 8°C，依據上述資訊推測，試問該日賣出的咖啡數量應接近下列哪一個選項？　【108 年學測】

(1) 570 杯 (2) 625 杯 (3) 700 杯 (4) 755 杯 (5) 800 杯

**答**：(2)

**解**：$\because r=-0.99\doteqdot -1$　　$\therefore m=\frac{437-512}{13-11}=\frac{-75}{2}$

$\therefore L: y-512=\frac{-75}{2}(x-11)$，代 $x=8$，$y-512=\frac{225}{2}\Rightarrow y=624.5$

**【範例四】**

下表為抽樣調查所得兩組資料，

| $X$ | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 9 | 9 | 12 | 9 | 11 |

試求：(1) $X$ 與 $Y$ 的相關係數。(2) $Y$ 對 $X$ 的迴歸直線方程式。

**答**：(1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　(2) $y=\frac{2}{5}x-6$

**解**：(1) $\mu_X=40$，$\mu_Y=10$

| $X_i-\mu_X$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i-\mu_Y$ | $-1$ | $-1$ | 2 | $-1$ | 1 |

$$\therefore r=\frac{\sum(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum(X_i-\mu_X)^2\sum(Y_i-\mu_Y)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10\cdot 8}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2) 斜率 $=\frac{\sum(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{\sum(X_i-\mu_X)^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$\therefore$ 迴歸線：$y-10=\frac{2}{5}(x-40)\Rightarrow y=\frac{2}{5}x-6$

**【範例五】**

已知以下各選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1)

| $x$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 13 | 1 |

(2)

| $x$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 10 | 2 |

(3)

| $x$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 7 | 3 |

(4)

| $x$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 1 | 5 |

(5)

| $x$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 4 | 4 |

【102 年學測】

**答**：(5)

**解**：$\mu_x=\frac{10}{3}$，$\mu_y=5$　$\therefore$ 迴歸線為 $y-5=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\frac{10}{3}\right)$

但 $\because r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=k<0$ 且 $\sigma_x,k$ 為定值　$\therefore r=\frac{k\sigma_x}{\sigma_y}<0$　$\therefore \sigma_y$ 越小則 $r$ 越小

(1) $\sigma_y=\sqrt{\frac{96}{3}}$　(2) $\sigma_y=\sqrt{\frac{38}{3}}$　(3) $\sigma_y=\sqrt{\frac{8}{3}}$

(4) $\sigma_y=\sqrt{\frac{32}{3}}$　(5) $\sigma_y=\sqrt{\frac{6}{3}}$

**【範例六】**

小明參加某次路跑 10 公里組的比賽，右表為小明手錶所記錄之各公里的完成時間、平均心率及步數：在這 10 公里的比賽過程，請依據數據，選出正確的選項。

| | 完成時間 | 平均心率 | 步數 |
|---|---|---|---|
| 第一公里 | 5:00 | 161 | 990 |
| 第二公里 | 4:50 | 162 | 1000 |
| 第三公里 | 4:50 | 165 | 1005 |
| 第四公里 | 4:55 | 162 | 995 |
| 第五公里 | 4:40 | 171 | 1015 |
| 第六公里 | 4:41 | 170 | 1005 |
| 第七公里 | 4:35 | 173 | 1050 |
| 第八公里 | 4:35 | 181 | 1050 |
| 第九公里 | 4:40 | 171 | 1050 |
| 第十公里 | 4:34 | 188 | 1100 |

(1) 由每公里的平均心率得知小明最高心率為 188
(2) 小明此次路跑，每步距離的平均小於 1 公尺
(3) 每公里完成時間和每公里平均心率的相關係數為正相關
(4) 每公里步數和每公里平均心率的相關係數為正相關
(5) 每公里完成時間和每公里步數的相關係數為負相關　【104 年學測】

**答**：(2)(4)(5)

**解**：(1) 第十公里平均心率為 188 無法保證在第十公里的所有時間點心率皆為 188，若任一瞬時低於 188 則必有另一瞬時高於 188

(2) 總步數為 $990+1000+1005+995+1015+1005+1050+1050+1050+1100=10260$

$\therefore \frac{10000}{10260}<1$

(3) 應為負相關

## 學測歸納重點《壬》 三角函數

**【範例一】**

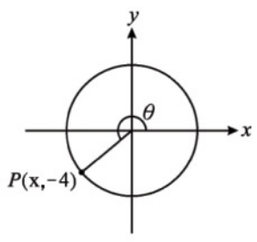
在坐標平面上，廣義角 $\theta$ 的頂點為原點 $O$，始邊為 $x$ 軸的正向，且滿足 $\tan\theta=\frac{2}{3}$。若 $\theta$ 的終邊上有一點 $P$，其 $y$ 坐標為 $-4$，則下列哪些選項一定正確？

(1) $P$ 的 $x$ 坐標是 6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$　(3) $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin 2\theta>0$　(5) $\cos\frac{\theta}{2}<0$　【101 年學測】

**答**：(2)(4)

**解**：(1) $\tan\theta=\frac{2}{3}$　$\therefore \frac{-4}{x}=\frac{2}{3}$　$\therefore x=-6(\theta\in \text{III})$



(2) $P(-6,-4)$　$\therefore \overline{OP}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

(3) $\tan\theta=\frac{2}{3}$　$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{13}}$　$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{13}$

(5) $180^\circ+n\times 360^\circ<\theta<270^\circ+n\times 360^\circ$

$\Rightarrow 90^\circ+n\times 180^\circ<\frac{\theta}{2}<135^\circ+n\times 180^\circ$

① 當 $n$ 為偶數時 $\frac{\theta}{2}\in \text{II}$　$\therefore \cos\frac{\theta}{2}<0$

② 當 $n$ 為奇數時 $\frac{\theta}{2}\in \text{IV}$　$\therefore \cos\frac{\theta}{2}>0$

**【範例二】**

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $50^\circ\le\angle A<\angle B\le 60^\circ$。試選出正確的選項。

(1) $\sin A<\sin B$　(2) $\sin B<\sin C$　(3) $\cos A<\cos B$

(4) $\sin C<\cos C$　(5) $\overline{AB}<\overline{BC}$　【108 年學測】

**答**：(1)(2)

**解**：$\because \angle A<60^\circ$，$\angle B<60^\circ$　$\therefore 60^\circ<\angle C<90^\circ$

$\therefore 50^\circ\le\angle A<\angle B<60^\circ<\angle C<90^\circ$

(1) $\sin A<\sin B$　(2) $\sin B<\sin C$　(3) $\cos A>\cos B$

(4) $\sin C>\cos C$　(5) $\because \frac{\sin C}{c}>\frac{\sin A}{a}$ 且 $\sin A<\sin C$　$\therefore a<c$ $\therefore \overline{BC}<\overline{AB}$

**【範例三】**

已知坐標平面上 $\triangle ABC$，其中 $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$，且 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$。試選出正確的選項。

(1) $\overline{BC}=5$　(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形　(3) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{11}{5}$

(4) $\sin B>\sin C$　(5) $\cos A>\cos B$　【107 年學測】

**答**：(2)(3)

**解**：(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\left(\frac{22}{5},-\frac{11}{5}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{11}{\sqrt{5}}$

(2) $\because \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\angle ACB=90^\circ$

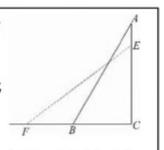
(3) $\overline{AC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}=\frac{11}{\sqrt{5}}\Rightarrow\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{11}{5}$

(4)(5) $\cos A=\sin B=\frac{2}{5\sqrt{5}}$、$\cos B=\frac{11}{5\sqrt{5}}$、$\sin C=1$

$\Rightarrow \sin C>\sin B$ 且 $\cos B>\cos A$

**【範例四】**

如右圖所示（只是示意圖），將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 $AC$ 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 $60^\circ$。將在地面上的底 $B$ 沿著地面向外拉 51 公分到點 $F$（即 $\overline{FB}=51$ 公分），此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC=0.6$，則梯子長 $\overline{AB}=$_____公分。　【107 年學測】



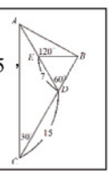
**答**：170

**解**：假設梯子長 $x$ 公分 $\Rightarrow \overline{BC}=\frac{1}{2}x$　$\because \sin\angle EFC=0.6\Rightarrow\cos\angle EFC=0.8$

$\therefore \cos\angle EFC=\frac{\overline{FC}}{\overline{EF}}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{51+\frac{1}{2}x}{x}\Rightarrow x=170$

**【範例五】**

如圖（此為示意圖），在 $\Delta ABC$ 中，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點，$\overline{BE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 $E$ 點，且 $\angle ACB=30^\circ$，$\angle EDB=60^\circ$，$\angle AEB=120^\circ$。若 $\overline{CD}=15$，$\overline{ED}=7$，則 $\overline{AB}=$_____。　【108 年學測】



**答**：13

**解**：$\because\triangle BDE$ 為正△　$\therefore \overline{BE}=\overline{DE}=7$ 又 $\angle CAD=180^\circ-120^\circ=30^\circ$

$\therefore \overline{AD}=\overline{DC}=15$　$\therefore \overline{AE}=8$

$\therefore\triangle ABE$ 中 $\overline{AB}^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cos 120^\circ=169$

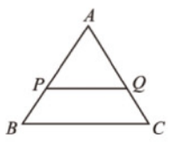
$\therefore \overline{AB}=13$

**【範例六】**

在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=10,\overline{AC}=9,\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點 $P,Q$ 分別在邊 $\overline{AB},\overline{AC}$ 使得 $\triangle APQ$ 之面積為 $\triangle ABC$ 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值為_____。　【98 年學測】

**答**：$\frac{15}{2}$

**解**：令 $\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$ $\frac{\triangle APQ}{\triangle ABC}=\frac{xy}{10\times 9}\Rightarrow\frac{xy}{90}=\frac{1}{2}$　$\therefore xy=45$



$\therefore \overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos A\ge 2xy-2xy\cos A=90(1-\cos A)$

$=90(1-\frac{3}{8})=\frac{225}{4}$　$\therefore \overline{PQ}\ge\frac{15}{2}$ 何明珍藏重要考題

**【範例七】**

請問 $\sin 73^\circ$、$\sin 146^\circ$、$\sin 219^\circ$、$\sin 292^\circ$、$\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？

(1) $\sin 73^\circ$　(2) $\sin 146^\circ$　(3) $\sin 219^\circ$　(4) $\sin 292^\circ$　(5) $\sin 365^\circ$　【105 年學測】

**答**：(5)

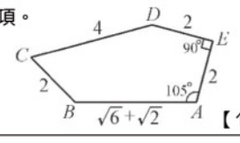
**解**：$\sin 146^\circ=\sin 34^\circ$　$\sin 219^\circ=-\sin 39^\circ$

$\sin 292^\circ=-\sin 68^\circ$　$\sin 365^\circ=\sin 5^\circ$

$\Rightarrow \sin 73^\circ>\sin 34^\circ>\sin 5^\circ>\sin 219^\circ>\sin 292^\circ$　中位數為 $\sin 5^\circ=\sin 365^\circ$

**【範例八】**

最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下。關於這五邊形，請選出正確的選項。



(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$　(2) $\angle DAB=45^\circ$
(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$　(4) $\angle ABD=45^\circ$
(5) $\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$　【106 年學測】

**答**：(1)(4)

**解**：(1) $\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

(2) $\angle DAB=105^\circ-45^\circ=60^\circ$

(3) $\overline{BD}^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos 60^\circ$

$=8+8+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4=12\Rightarrow\overline{BD}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(4) $\frac{\sin\angle ABD}{2\sqrt{2}}=\frac{\sin 60^\circ}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle ABD=45^\circ$

(5) $\triangle BCD$ 為直角三角形，面積 $=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

**【範例九】**

試問有多少個實數 $x$ 滿足 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ\le\cos x$？

(1) 0 個 (2) 1 個 (3) 2 個 (4) 4 個 (5) 無窮多個　【106 年學測】

**答**：(1)

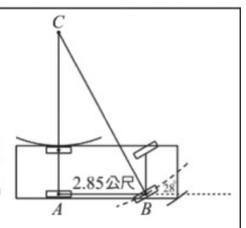
**解**：$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow -1\le\cos x\le 0$　$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow 1.57\le x\le 4.71$

$\Rightarrow\cos 4.71^\circ\le\cos x^\circ\le\cos 1.57^\circ$　$\Rightarrow 0\le\cos x^\circ\le 1$，無實數解

**【範例十】**

下圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 $A$ 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，$B$ 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為_____公尺。

（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28^\circ\approx 0.4695$，$\cos 28^\circ\approx 0.8829$）　【104 年學測】



**答**：6.1

**解**：由輪子行走方向與輪子到轉軸的半徑垂直可知 $\angle ACB=28^\circ$

$\because \sin 28^\circ=\frac{2.85}{\overline{BC}}$

$\therefore \overline{BC}=\frac{2.85}{\sin 28^\circ}=\frac{2.85}{0.4695}\doteqdot 6.1$

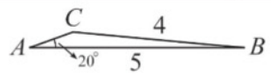
**【範例十一】**

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=20^\circ$、$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=4$。請選出正確的選項。

(1) 可以確定 $\angle B$ 的餘弦值　(2) 可以確定 $\angle C$ 的正弦值
(3) 可以確定 $\triangle ABC$ 的面積　(4) 可以確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑
(5) 可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑　【105 年學測】

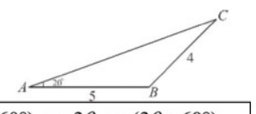
**答**：(2)(5)

**解**：(1)(3)(4) 值不唯一



(2) 兩圖 $\angle C$ 互補，正弦值不變

(5) $2R=\frac{4}{\sin 20^\circ}$ 為定值，唯一



**【範例十二】**

試問共有幾個角度 $\theta$ 滿足 $0^\circ<\theta<180^\circ$，且 $\cos(3\theta-60^\circ),\cos 3\theta,\cos(3\theta+60^\circ)$ 依序成一等差數列？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個　【107 年學測】

**答**：(3)

**解**：$\cos(3\theta-60^\circ)+\cos(3\theta+60^\circ)=2\cos 3\theta$

$\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3\theta+\frac{1}{2}\sin 3\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3\theta-\frac{1}{2}\sin 3\theta\right)=2\cos 3\theta$

$\sqrt{3}\cos 3\theta=4\cos 3\theta\Rightarrow\cos 3\theta=0$

又 $0^\circ<3\theta<540^\circ\Rightarrow 3\theta=90^\circ,270^\circ,540^\circ\Rightarrow\theta=30^\circ,90^\circ,150^\circ$

**【範例十三】**

坐標平面上，函數圖形 $y=-\sqrt{3}x^3$ 上有兩點 $P,Q$ 到原點距離皆為 1。已知點 $P$ 坐標為 $(\cos\theta,\sin\theta)$，試問點 $Q$ 坐標為何？

(1) $(\cos(-\theta),\sin(-\theta))$ (2) $(-\cos\theta,\sin\theta)$

(3) $(\cos(-\theta),-\sin\theta)$　(4) $(-\cos\theta,\sin(-\theta))$

(5) $(\cos\theta,-\sin\theta)$　【109年學測】

**答**：(4)

**解**：$P$、$Q$ 兩點對稱原點 $\Rightarrow Q(-\cos\theta,-\sin\theta)=(-\cos\theta,\sin(-\theta))$

**【範例十四】**

如右圖，直角三角形 $ABD$ 中，$\angle A$ 為直角，$C$ 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。已知 $\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，$\angle ABD=2\angle ABC$，則 $\overline{BD}=$_____。（化成最簡分數）　【99 年學測】

**答**：$\frac{90}{7}$

**解**：設 $\angle ABC=\theta$　$\therefore \angle ABD=2\theta$

由已知　$\cos\theta=\frac{5}{6}$　$\therefore \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot(\frac{5}{6})^2-1=\frac{7}{18}$

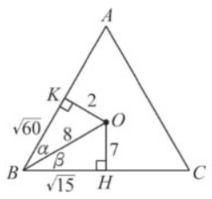
$\therefore \cos 2\theta=\frac{5}{\overline{BD}}$　$\therefore \frac{7}{18}=\frac{5}{\overline{BD}}$　$\therefore \overline{BD}=\frac{90}{7}$ 何明珍藏重要考題

**【範例十五】**

設銳角三角形 $ABC$ 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}=$_____。（化成最簡根式）　【102 年學測】

**答**：$4\sqrt{15}$

**解**：設 $\triangle ABC$ 外心為 $O$，則 $\overline{OB}=8$



$\therefore \overline{BH}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$，$\overline{BK}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

$\therefore \sin B=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{2}{8}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{2\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore$ 由正弦定理 $\frac{\sin B}{\overline{AC}}=\frac{1}{2R}$　$\therefore \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2\times 8}$　$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{15}$

版權所有・請勿翻印

# 110年學測 五選四．數學科是滿級分關鍵

台北何明數學．台南宏達升學教育機構提供 網址：www.hdps.com.tw 電話：06－2201833

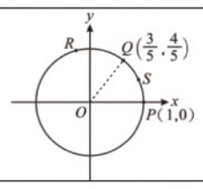
**【範例十六】**

如右圖，$P$、$S$、$Q$、$R$ 為單位圓上的點，

其中 $P(1,0)$，$Q(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$。

(1) 若 $PQ=QR$，則 $R$ 點之坐標為_____。

(2) 若 $PS=QS$，則 $S$ 點之坐標為_____。




**答**：(1) $(-\frac{7}{25},\frac{24}{25})$ (2) $(\frac{2\sqrt{5}}{8},\frac{\sqrt{5}}{5})$

**解**：令 $Q(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\cos\theta,\sin\theta)$

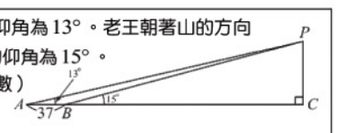
(1) $R(\cos2\theta,\sin2\theta)=(2\cos^2\theta-1,\,2\sin\theta\cos\theta)=(-\frac{7}{25},\frac{24}{25})$

(2) $S(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})=(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}})=(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$

**【範例十七】**

如圖，老王在平地點 $A$ 測得遠方山頂點 $P$ 的仰角為 $13°$。老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 $B$，再測得山頂點 $P$ 的仰角為 $15°$。則山高約為_____公丈。(四捨五入至個位數)

( $\tan13°\approx0.231$，$\tan15°\approx0.268$ )




【104 年學測】

**答**：62

**解**：令 $\overline{BC}$ 為 $t$，可得 $\overline{CP}=\tan15°\times t=\tan13°\times(t+37)$

$\Rightarrow t(\tan15°-\tan13°)=\tan13°\times37\Rightarrow t(0.037)=0.231\times37$

得 $t=231$ 所求為 $0.268\times231=61.908\approx62$

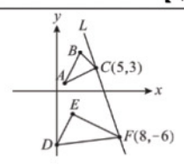
## 學測歸納重點《癸》 直線與線性規劃

**【範例一】**

設 $A(1,1)$，$B(3,5)$，$C(5,3)$，$D(0,-7)$，$E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點，若直線 $L$ 分別與 $\triangle ABC$ 即 $\triangle DEF$ 個恰有一個交點則 $L$ 的斜率最小可能值為_____。 【101 年學測】

**答**：$-3$

**解**：$L$ 斜率最小即 $\overleftrightarrow{CF}$ 之斜率 $=\frac{-6-3}{8-5}=-3$



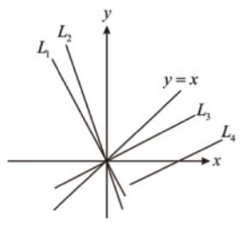

**【範例二】**

N 坐標平面上四條直線 $L_1,L_2,L_3,L_4$ 與 $x$ 軸、$y$ 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如圖所示，其中 $L_1$ 與 $L_3$ 垂直，而 $L_3$ 與 $L_4$ 平行。

設 $L_1,L_2,L_3,L_4$ 方程式分別為 $y=m_1x$，$y=m_2x$，$y=m_3x$ 以及 $y=m_4x+c$。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $m_3>m_2>m_1$ (2) $m_1\cdot m_4=-1$

(3) $m_1<-1$ (4) $m_2\cdot m_3<-1$ (5) $c>0$ 【98 年學測】




**答**：(2)(3)(4)

**解**：(1) $m_3>0>m_1>m_2$ (2) $m_1\cdot m_4=m_1\cdot m_3=-1$

(3) $m_1\cdot m_3=-1$ 但 $0<m_3<1$ $\therefore m_1<-1$

(4) $m_2\cdot m_3<m_1\cdot m_3=-1$ (5) $\because y=m_4x+c$ 過 $(0,c)$ $\therefore c<0$

**【範例三】**

設 $a$ 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases}x-3y\le a\\x+2y\le14\end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a=$_____。 【105 年學測】

**答**：6

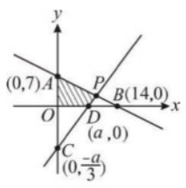
**解**：利用 $\triangle ABO-\triangle BDP=\frac{213}{5}$

大 $\triangle ABO$ 面積 $=\frac{1}{2}\times7\times14=49$，$\triangle BPD$ 面積為 $49-\frac{213}{5}=\frac{32}{5}$

$P$ 點的 $y$ 坐標為 $\begin{cases}x-3y=a\\x+2y=14\end{cases}\Rightarrow y=\frac{14-a}{5}$

$\triangle BPD$ 面積 $\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{14-a}{5}\times(14-a)=\frac{32}{5}$

$\Rightarrow(14-a)^2=64\Rightarrow14-a=\pm8\Rightarrow a=6,22$ ( 22 不合)




**【範例四】**

設 $A(-2,1),B(3,2)$，若直線 $y=mx-2$ 恆與線段 $\overline{AB}$ 不相交，則 $m$ 之範圍為

(A) $m>\frac{4}{3}$ (B) $m<-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}<m<\frac{4}{3}$ (D) $m>\frac{4}{3}$ 或 $m<\frac{-3}{2}$

**答**：(C)

**解**：$A(-2,1),B(3,2)$ 在 $mx-y-2=0$ 同側 $\therefore(-2m-3)(3m-4)>0$

$\therefore(2m+3)(3m-4)<0\therefore-\frac{3}{2}<m<\frac{4}{3}$

**【範例五】**

直線 $L$ 過 $P(1,2)$ 交二直線 $2x+y+3=0$，$x+y-1=0$ 於 $A,B$ 兩點，若 $\overline{AB}$ 被 $P$ 點平分，求 $L$ 之方程式為_____。

**答**：$11x+9y-29=0$

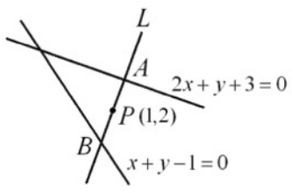
**解**：$A(x_1,y_1)\to2x_1+y_1+3=0\cdots(1)$

$B(x_2,y_2)\to x_2+y_2-1=0\cdots(2)$

又 $\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=1\\\frac{y_1+y_2}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2-x_1\\y_2=4-y_1\end{cases}$ 代入 (2)

$\therefore(2-x_1)+(4-y_1)-1=0$ $\therefore x_1+y_1-5=0\cdots(3)$

由 (1)(3) 得 $A(x_1,y_1)=(-8,13)$ $\therefore L$ 即 $\overleftrightarrow{AP}:11x+9y-29=0$




**【範例六】**

一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上由點 $A(0,30)$、$B(18,27)$、$C(20,0)$、$D(2,3)$ 所圍成的平行四邊形及其內部。已知目標函數 $ax+by$（其中 $a,b$ 為常數）在 $D$ 點有最小值 48，則此目標函數在同個可行解區域的最大值為_____。 【100 年指考數乙】

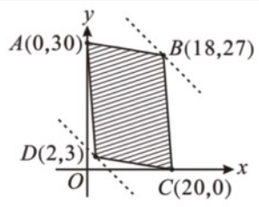
**答**：432

**解**：目標函數 $f(x,y)=ax+by$

由已知 $f(2,3)=2a+3b=48$（最小）

$\therefore$ 最大 $f(18,27)=18a+27b$

$=9(2a+3b)=9\times48=432$



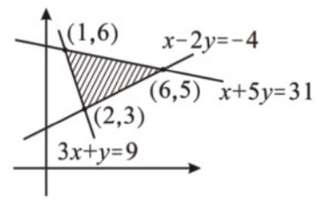

**【範例七】**

若 $(x,y)$ 為聯立不等式 $\begin{cases}3x+y\ge9\\x-2y\le-4\\x+5y\le31\end{cases}$ 所表示圖形上一點，且 $kx+y$ 在 $(1,6)$ 有極小值時，$k$ 的範圍為_____。

**答**：$k\ge3$

**解**：$kx+y\begin{cases}(1,6)\to k+6\ (\text{極小})\\(2,3)\to2k+3\\(6,5)\to6k+5\end{cases}$ 何明珍藏重要考題

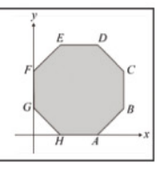
$\therefore\begin{cases}k+6\le2k+3\Rightarrow k\ge3\\k+6\le6k+5\Rightarrow k\ge\frac{1}{5}\end{cases}$，交集 $k\ge3$




**【範例八】**

一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上的正八邊形 $ABCDEFGH$ 及其內部，如右圖。已知目標函數 $ax+by+3$（其中 $a,b$ 為實數）的最大值只發生在 $B$ 點。請問當目標函數改為 $3-bx-ay$ 時，最大值會發生在下列哪一點？

(1) $A$ (2) $B$ (3) $C$ (4) $D$ (5) $E$ 【104 年學測】




**答**：(1)

**解**：$\because\overleftrightarrow{AB}$ 斜率為 1 $\therefore ax+by+3$ 最大值產生在 $B$ 點，則 $-\frac{a}{b}>1$ 且 $a>0$ $\therefore b<0$

$\therefore k=-bx-ay+3$ 中 $-b>0$ 且斜率 $0<-\frac{b}{a}<1$ 何明珍藏重要考題

$\therefore k$ 最大值會產生在 $A$

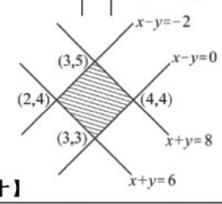
**【範例九】**

令 $\vec{A},\vec{B}$ 為坐標平面上兩向量。已知 $\vec{A}$ 的長度為 1，$\vec{B}$ 的長度為 2 且 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 之間的夾角為 $60°$。令 $\vec{u}=\vec{A}+\vec{B}$，$\vec{v}=x\vec{A}+y\vec{B}$，其中 $x,y\in\mathbb{R}$ 且符合 $6\le x+y\le8$ 以及 $-2\le x-y\le0$，則內積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ 的最大值為_____。 【102 年學測】

**答**：31

**解**：由已知 $|\vec{A}|=1$，$|\vec{B}|=2$，$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos60°=1$

$\therefore\vec{u}\cdot\vec{v}=x|\vec{A}|^2+(x+y)\vec{A}\cdot\vec{B}+y|\vec{B}|^2=x+(x+y)+4y=2x+5y$




$\therefore 2x+5y\begin{cases}(2,4)\to24\\(3,3)\to21\\(4,4)\to28\\(3,5)\to31(\text{最大})\end{cases}$

**【範例十】**

坐標平面上，圓 $\Gamma$ 完全落在四個不等式：$x-y\le4$、$x+y\le18$、$x-y\ge-2$、$x+y\ge-24$ 所圍成的區域內。則 $\Gamma$ 最大可能面積為_____ $\pi$。(化成最簡分數) 【107 年學測】

**答**：$\frac{9}{2}$

**解**：最大直徑 $2R\le\frac{|4-(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}\Rightarrow R\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

最大圓面積為 $\pi R^2=\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\pi$

## 學測歸納重點《子》 平面向量與空間向量

**【範例一】**

設 $D$ 為 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊上的一點，已知 $\angle ABC=75°$、$\angle ACB=45°$、$\angle ADB=60°$。若 $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，則 $s=$_____，$t=$_____。(化成最簡分數) 【107 年學測】

**答**：$s=\frac{1}{3}$、$t=\frac{2}{3}$

**解**：可令 $\overline{BD}=1$、$\overline{CD}=x$，

由正弦定理可知 $\frac{\sin\angle BAD}{1}=\frac{\sin\angle ADB}{\overline{AB}}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AB}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

且 $\triangle ABC\sim\triangle DBA\Rightarrow\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}\Rightarrow1+x=(\overline{AB})^2=\frac{3}{2}\therefore x=\frac{1}{2}$

則 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:\frac{1}{2}=2:1\Rightarrow s=\frac{1}{3},t=\frac{2}{3}$

**【範例二】**

將單位正立方體的角落切掉，使得原來的六個面的每一個面都變成正八邊形，所有切下來的四面體之體積的總和是多少？ 【AMC12A-2007】

(A) $\frac{5\sqrt{2}-7}{3}$ (B) $\frac{10-7\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{8\sqrt{2}-11}{3}$ (E) $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$

**答**：(B)

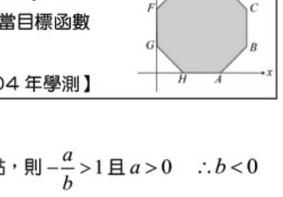
**解**：設被截去之小四面體兩兩垂直之邊長為 $x$

$\therefore$ 由圖中可得 $x+\sqrt{2}x+x=1$

$\therefore x=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 何明珍藏重要考題

$\therefore$ 被切下來每個小四面體體積 $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\cdot x\cdot x)\cdot x=\frac{1}{6}x^3$

$\therefore$ 切下來四面體體積總和為 $8(\frac{1}{6}x^3)=\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})^3=\frac{10-7\sqrt{2}}{3}$




**【範例三】**

空間中有三點 $A(1,7,2)$、$B(2,-6,3)$、$C(0,-4,1)$。若直線 $L$ 通過 $A$ 點並與直線 $BC$ 相交且垂直，則 $L$ 和直線 $BC$ 的交點坐標為(_____,_____,_____)。 【109 年學測】

**答**：$(-3,-1,-2)$

**解**：$\overrightarrow{BA}=(-1,13,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$

$\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2+26+2}{12}(-2,2,-2)=(-5,5,-5)$

$B+(-5,5,-5)=(-3,-1,-2)$

**【範例四】**

坐標平面上給定兩點 $A(1,0)$ 與 $B(0,1)$，又考慮另外三點 $P(\pi,1)$、$Q(-\sqrt{3},6)$ 與 $R(2,\log_4 32)$。令 $\triangle PAB$ 的面積為 $p$、$\triangle QAB$ 的面積為 $q$、$\triangle RAB$ 的面積為 $r$。請問下列哪一個選項是正確的？ 【99 年學測】

(1) $p<q<r$ (2) $p<r<q$ (3) $q<p<r$ (4) $q<r<p$ (5) $r<q<p$

**答**：(1)

**解**：$\because\overrightarrow{AB}=(-1,1),\overrightarrow{AP}=(\pi-1,1)$ 何明珍藏重要考題

$\therefore p=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\\pi-1&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-1-\pi+1|=\frac{\pi}{2}\approx1.57$

同理：$q=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\-\sqrt{3}-1&6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-6+\sqrt{3}+1|=\frac{1}{2}(5-\sqrt{3})\approx1.634$

$r=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\1&\log_4 32\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-\log_4 32-1|=\frac{1}{2}|-\frac{5}{2}-1|=\frac{7}{4}\approx1.75$ $\therefore p<q<r$

**【範例五】**

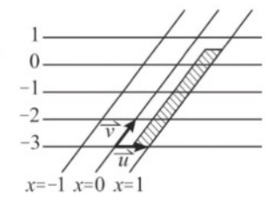
坐標平面上 $O$ 為原點，設 $\vec{u}=(1,2),\vec{v}=(3,4)$。令 $\Omega$ 為滿足 $\overrightarrow{OP}=x\vec{u}+y\vec{v}$ 的所有點 $P$ 所形成的區域，其中 $\frac{1}{2}\le x\le1$、$-3\le y\le\frac{1}{2}$，則 $\Omega$ 的面積為_____平方單位。(化成最簡分數) 【105 年學測】

**答**：$\frac{7}{2}$

**解**：$\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 所形成的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\right|=2$

所求面積為 $\frac{1}{2}\times3+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ 個平行四邊形的面積

面積為 $\frac{7}{4}\times2=\frac{7}{2}$




**【範例六】**

$\triangle ABC$ 內接於圓心為 $O$ 之單位圓。若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 $\angle BAC$ 之度數為何？

(1) $30°$ (2) $45°$ (3) $60°$ (4) $75°$ (5) $90°$ 【107 年學測】

**答**：(4)

**解**：$\because\left|\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+3\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+2\sqrt{3}\cos\angle BOC=1$

$\Rightarrow\cos\angle BOC=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle BOC=150°\therefore\angle BAC=75°$

**【範例七】**

空間中有一四面體 $ABCD$。假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) 若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角

(3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角 (4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角

(5) 若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角 【106年學測】

**答**：(3)(5)

**解**：(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{DA}\right)^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) 若 $\angle BAC$ 為直角 $\Rightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2>0$ $\therefore\angle BDC$ 為銳角

(3) 若 $\angle BAC$ 為銳角 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Rightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$ $\therefore\angle BDC$ 為銳角

(4) 若 $\angle BAC$ 為鈍角 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0\Rightarrow$ 無法判斷 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的正負

(5) $\overline{AB}\cdot\overline{AC}<\overline{DA}^2$ $\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overline{DA}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\angle BAC>0$ 恆成立

$\therefore\angle BDC$ 為銳角

**【範例八】**

在坐標平面上，$\triangle ABC$ 內有一點 $p$ 滿足 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。

若 $A,P$ 連線交 $\overline{BC}$ 於 $M$，則 $\overrightarrow{AM}=$_____。(化成最簡分數) 【106 年學測】

**答**：$\left(\frac{40}{21},\frac{25}{21}\right)$

**解**：令 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}t\overrightarrow{AC}$ $\because B,M,C$ 三點共線

$\Rightarrow\frac{1}{2}t+\frac{1}{5}t=1$ $\therefore t=\frac{10}{7}$ $\therefore\overrightarrow{AM}=\frac{10}{7}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{40}{21},\frac{25}{21}\right)$

**【範例九】**

設 $\vec{u},\vec{v}$ 為兩個長度皆為 1 的向量。若 $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u}$ 的夾角為 $75°$，則 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的內積為_____。(化為最簡根式) 【103 年學測】

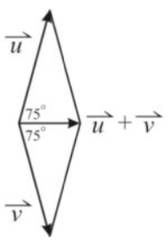
**答**：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**解**：$\because|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$，$\therefore\vec{u},\vec{v}$ 所構成之平行四邊形為菱形

$\therefore\vec{u}+\vec{v}$ 在 $\vec{u},\vec{v}$ 的角平分線上

$\therefore\vec{u},\vec{v}$ 夾角為 $2\times75°=150°$ 何明珍藏重要考題

$\therefore\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos150°=1\times1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$




**【範例十】**

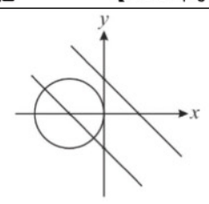
坐標平面上兩圖形 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 的方程式分別為：$\Gamma_1:(x+1)^2+y^2=1$、$\Gamma_2:(x+y)^2=1$。請問 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 共有幾個交點？(單選)

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個 【105 年學測】

**答**：(2)

**解**：$(x+y)^2=1\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\x+y=-1\end{cases}$

由圖可知 2 交點




版權所有．請勿翻印

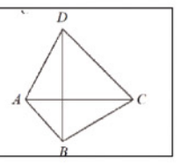
# 宏達指考重考精英班

■開課日期：110年1月25日
■開課班系：各類組獨立開班

宏達升學教育機構　台南市中山路147號7樓　電話：06-2201833　網址：www.hdps.com.tw


**【範例十一】**

如圖（此為示意圖），$A,B,C,D$ 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD=$_____。【108 年學測】




答：$-3$

解：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

令 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AC}=2t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$

$\because B,E,D$ 共線 $\therefore 2t+t=1\ \therefore t=\frac{1}{3}$

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overline{AE}:\overline{EC}=1:2\\ \overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overline{BE}:\overline{ED}=1:2\end{cases}$

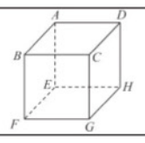
但 $\because\overline{AC}=\overline{BD}$ $\therefore$ 可令 $\overline{AC}=\overline{BD}=3$

$\therefore\overline{AE}=1$，$\overline{BE}=1$，$\overline{DE}=2$

又 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ $\therefore\tan\angle BAD=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+1}{1-2\cdot1}=-3$

**【範例十三】**

如右圖所示，$ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 $BDG$ 上一點 $P$ 滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$，則實數 $a=$_____。（化成最簡分數）【105 年學測】




答：$\frac{4}{3}$

解：$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AG}-a\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AG}-a\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{AB}+(2-a)\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AG}$

$\because B,D,G$ 三點共平面　$\therefore\left(\frac{1}{3}-a\right)+(2-a)+a=1$　$\therefore a=\frac{4}{3}$

**【範例十四】**

坐標平面上，直線 $L_1$ 與 $L_2$ 的方程式分別為 $x+2y=0$ 與 $3x-5y=0$。為了確定平面上某一定點 $P$ 的坐標，從 $L_1$ 上的一點 $Q_1$ 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_1P}=(-7,9)$，再從 $L_2$ 上的點 $Q_2$ 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_2P}=(-6,-8)$，則 $P$ 點的坐標為_____。【104 年學測】

答：$(9,1)$

解：令 $P$ 點坐標 $(a,b)\Rightarrow Q_1=P-\overrightarrow{Q_1P}=(a,b)-(-7,9)=(a+7,b-9)$

$Q_2=P-\overrightarrow{Q_2P}=(a,b)-(-6,-8)=(a+6,b+8)$

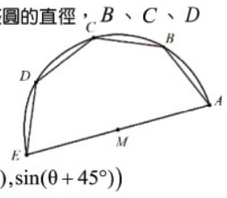
分別把 $Q_1,Q_2$ 代入 $L_1,L_2$ $\begin{cases}(a+7)+2\cdot(b-9)=0\\3\cdot(a+6)-5\cdot(b+8)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2b=11\cdots\cdots①\\3a-5b=22\cdots②\end{cases}$

$3\times①-②\Rightarrow11b=11\Rightarrow b=1$　代回 ① $\Rightarrow a+2\times1=11\Rightarrow a=9$

$P$ 點坐標為 $(9,1)$

**【範例十五】**

如圖，以 $M$ 為圓心、$\overline{MA}=8$ 為半徑畫圓，$\overline{AE}$ 為該圓的直徑，$B$、$C$、$D$ 三點皆在圓上，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$。若 $\overrightarrow{MD}=8(\cos(\theta+90°),\sin(\theta+90°))$。請選出正確的選項。




(1) $\overrightarrow{MA}=8(\cos\theta,\sin\theta)$　(2) $\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45°),\sin(\theta+45°))$

(3)（內積）$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=8$　(4)（內積）$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5) $\overrightarrow{BD}=8(\cos\theta+\cos(\theta+90°),\sin\theta+\sin(\theta+90°))$　【104 年學測】

答：(2)(4)

解：由已知 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMD=\angle DME=45°$

(1) $\overrightarrow{MA}=8(\cos(\theta-45°),\sin(\theta-45°))$

(2) 將 $\overrightarrow{MD}$ 順時針轉 $45°$ 即 $\overrightarrow{MC}$　$\therefore\overrightarrow{MC}=8(\cos(\theta+45°),\sin(\theta+45°))$

(3) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA}=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2=64$　(4) $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MD}\Rightarrow\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

(5) $\overrightarrow{MB}=8(\cos\theta,\sin\theta)$

$\therefore\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}=8(\cos(\theta+90°)-\cos\theta,\sin(\theta+90°)-\sin\theta)$

## 學測歸納重點《丑》　圓

**【範例一】**

在 $xy$ 平面上一點 $A(1,\frac{5}{2})$ 處放置一光源，將圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 投射在 $x$ 軸上的投影長為_____。

答：6

解：過 $A(1,\frac{5}{2})$ 之切線 $L:y-\frac{5}{2}=m(x-1)$ 即 $2mx-2y-2m+5=0$，

圓心 $C(0,1)$　$\therefore d(C,L)=1$　$\therefore\frac{|3-2m|}{\sqrt{4m^2+4}}=1$　$\therefore(3-2m)^2=4m^2+4$

$\therefore m=\frac{5}{12}$　$\therefore$ 切線 $5x-12y+25=0$ 或 $x=1$ 何明珍藏重要考題

此二切線與 $x$ 軸交於 $P(-5,0),Q(1,0)$　$\therefore$ 所求 $\overline{PQ}=6$

**【範例二】**

設 $\Gamma$ 為坐標平面上的圓，點 $(0,0)$ 在 $\Gamma$ 的外部且點 $(2,6)$ 在 $\Gamma$ 的內部。請選出正確的選項。

(1) $\Gamma$ 的圓心不可能在第二象限

(2) $\Gamma$ 的圓心可能在第三象限且此時 $\Gamma$ 的半徑必定大於 10

(3) $\Gamma$ 的圓心可能在第一象限且此時 $\Gamma$ 的半徑必定小於 10

(4) $\Gamma$ 的圓心可能在 $x$ 軸上且此時圓心的 $x$ 坐標必定小於 10

(5) $\Gamma$ 的圓心可能在第四象限且此時 $\Gamma$ 的半徑必定大於 10　【106年學測】

答：(5)

解：設圓心 $(x,y)$，可得 $\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}>\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2>x^2-4x+4+y^2-12y+36$

$\Rightarrow4x+12y>40\Rightarrow x+3y-10>0$　此範圍的點皆符合題意

(1) 可能　(2) 不可能在第三象限　(3) 若圓心為 $(100,100)$，半徑大於 10

(4) $\begin{cases}y=0\\x+3y-10>0\end{cases}\Rightarrow x>10$，必大於 10

(5) 在第四象限，半徑 $>\sqrt{(2-10)^2+(6-0)^2}=\sqrt{64+36}=10$

**【範例三】**

平面上兩點 $A$、$B$ 之距離為 5，以 $A$ 為圓心作一半徑為 $r$（$0<r<5$）的圓 $\Gamma$，過 $B$ 作圓 $\Gamma$ 的切線，切點（之一）為 $P$。當 $r$ 變動時，$\triangle PAB$ 的面積最大可能值為_____。（化成最簡分數）【107 年學測】

答：$\frac{25}{4}$

解：由已知 $\overline{AP}=r$、$\overline{BP}=\sqrt{25-r^2}$

$\Rightarrow\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{BP}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\sqrt{25-r^2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{r+\sqrt{25-r^2}}{2}$

"=" 成立時，$r=\sqrt{25-r^2}\Rightarrow r=\frac{5}{\sqrt{2}}$　$\therefore\triangle PAB\le\frac{25}{4}$

**【範例四】**

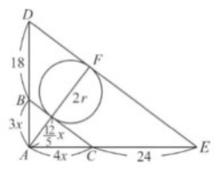
地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為_____公尺。【106 年學測】

答：14.4

解：$\because\triangle ABC\sim\triangle FDA$，令圓柱半徑 $r$、$\overline{AB}=3x$、

$\overline{AC}=4x$、$\overline{BC}=5x\Rightarrow\frac{\frac{12}{5}x+2r}{3x+18}=\frac{4x}{5x}$

$\Rightarrow r=7.2$　$\therefore 2r=2\times7.2=14.4$




## 學測歸納重點《寅》　空間平面與空間直線

**【範例一】**

給定相異兩點 $A$、$B$，試問空間中能使 $\triangle PAB$ 成一正三角形的所有點 $P$ 所成集合為下列哪一選項？

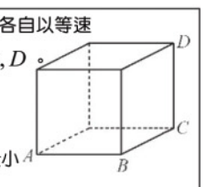
(1) 兩個點　(2) 一線段　(3) 一直線　(4) 一圓　(5) 一平面　【107 年學測】

答：(4)

解：$\triangle PAB$ 為正三角形，$P$ 之集合為一圓。

**【範例二】**

在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 $A,C$ 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 $B,D$ 前進，且在 1 秒後分別同時到達 $B,D$。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。




(1) 兩質點的距離固定不變　(2) 兩質點的距離越來越小

(3) 兩質點的距離越來越大　(4) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小

(5) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大　【106年學測】

答：(4)

解：設正立方體邊長為 $a$，速度為 $\frac{a}{1}=a$，

假設各自前進 $t$ 秒時，兩點距離為 $\sqrt{(a-at)^2+a^2+(at)^2}$

$=a\sqrt{2t^2-2t+2}=a\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$　$t=\frac{1}{2}$ 秒時，距離最小

**【範例三】**

坐標空間中有三直線 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$，$L_2:\begin{cases}x-2y+2z=-4\\x+y-4z=5\end{cases}$，

$L_3:\begin{cases}x=-t\\y=-2-t\\z=4+4t\end{cases}$，$t$ 為實數。請選出正確的選項。

(1) $L_1$ 與 $L_2$ 的方向向量互相垂直　(2) $L_1$ 與 $L_3$ 的方向向量互相垂直

(3) 有一個平面同時包含 $L_1$ 與 $L_2$　(4) 有一個平面同時包含 $L_1$ 與 $L_3$

(5) 有一個平面同時包含 $L_2$ 與 $L_3$　【106年學測】

答：(2)(3)(4)

解：三直線方向向量：$\overrightarrow{L_1}=(2,2,1)$、$\overrightarrow{L_3}=(-1,-1,4)$

$\overrightarrow{L_2}=(1,-2,2)\times(1,1,-4)=(6,6,3)\approx(2,2,1)$

(1) $\overrightarrow{L_1}//\overrightarrow{L_2}$　(2) $\overrightarrow{L_1}\cdot\overrightarrow{L_3}=(2,2,1)\cdot(-1,-1,4)=0$ (3) 兩平行直線可決定一平面

(4) $L_3$ 帶入 $L_1$ 得 $t=-1$，則交點為 $(1,-1,0)$，故兩相交直線可決定一平面

(5) $L_3$ 帶入 $L_2$，$t$ 無解，所以兩直線歪斜

**【範例四】**

平面 $x-y+z=0$ 與三平面 $x=2$，$x-y=-2$，$x+y=2$ 分別相交所得的三直線可圍成一個三角形。此三角形之周長化成最簡根式，可表為 $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$，其中 $a,b,c,d$ 為正整數且 $b<d$，則 $a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$d=$_____。【104 年學測】

答：$a=6,b=2,c=2,d=6$

解：分別求出兩兩平面 $x=2$、$x-y=-2$、$x+y=2$ 與平面 $x-y+z=0$ 相交分別求 $A,B,C$ 三點

$A:\begin{cases}x=2\\x-y=-2\\x-y+z=0\end{cases}$　$B:\begin{cases}x-y=-2\\x+y=2\\x-y+z=0\end{cases}$　$C:\begin{cases}x=2\\x+y=2\\x-y+z=0\end{cases}$

$\Rightarrow(x,y,z)=(2,4,2)$　$\Rightarrow(x,y,z)=(0,2,2)$　$\Rightarrow(x,y,z)=(2,0,-2)$

所求 $\Rightarrow\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}+\sqrt{2^2+2^2+4^2}+\sqrt{4^2+4^2}$

$=\sqrt{8}+\sqrt{24}+\sqrt{32}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

故可得 $a=6,b=2,c=2,d=6$

**【範例五】**

將一塊邊長 $\overline{AB}=15$ 公分、$\overline{BC}=20$ 公分的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對摺後豎立，使得平面 $ABD$ 與平面 $CBD$ 垂直，則 $A$、$C$ 兩點（在空間）的距離 $\overline{AC}=$_____公分。（化成最簡根式）【107 年學測】

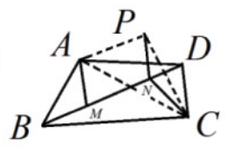
答：$\sqrt{337}$

解：由圖可知 $\overline{BD}=25$、$\overline{AM}=\overline{PN}=12$

$\overline{BM}=\overline{DN}=9\Rightarrow\overline{MN}=7$、$\overline{AP}=7$、$\overline{PC}=12\sqrt{2}$

又 $\angle APC=90°$

$\Rightarrow\overline{AC}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PC}^2}=\sqrt{7^2+(12\sqrt{2})^2}=\sqrt{337}$




**【範例六】**

坐標空間中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$ 等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x-y+3z=28$ 上，立即轉向沿著方向 $\overrightarrow{b}=(-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x=2$ 上？

(1) 1 秒　(2) 2 秒　(3) 3 秒　(4) 4 秒　(5) 永遠不會到達　【105 年學測】

答：(2)

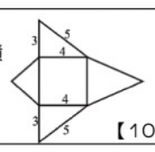
解：設 $P$ 經過 5 秒後的坐標為 $(1+5v,1+10v,1+10v)$ 代入 $x-y+3z=28\Rightarrow v=1$

坐標為 $(6,11,11)$

由於 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|$　假設經過 $h$ 秒到達 $x=2$　$\therefore 6-2h=2\Rightarrow h=2$ (秒)

**【範例七】**

有一底面為正方形的四角錐，其展開圖如下圖所示，其中兩側面的三角形邊長為 $3,4,5$，則此角錐的體積為_____。（化為最簡根式）【104 年學測】




答：$\frac{16\sqrt{5}}{3}$

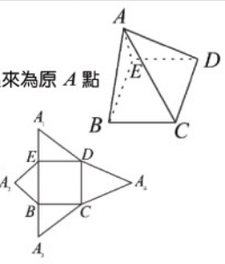
解：將立體圖形從 $A$ 點拆開，展開圖中 $A_1,A_2,A_3,A_4$ 組合起來為原 $A$ 點

$\because A_1,E,B,A_3$ 共線

$\therefore$ 可知立體圖中 $ABE$ 平面與底面 $BCDE$ 垂直

故此四角錐的高為 $\triangle A_2BE$ 以 $\overline{BE}$ 為底 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

體積為 $4^2\times\sqrt{5}\times\frac{1}{3}=\frac{16\sqrt{5}}{3}$




**【範例八】**

$H:x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，$L$ 為平面 $H$ 上的一直線。已知點 $P(2,1,1)$ 為 $L$ 上距離原點 $O$ 最近的點，則 $L$ 的方向向量為_____。【100 年學測】

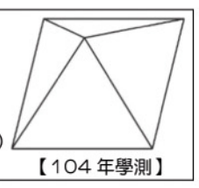
答：$(2,-1,-3)$

解：設 $L$ 方向為 $\overrightarrow{N}$，則 $\overrightarrow{N}\perp$ 平面法向量 $\overrightarrow{N_1}=(1,-1,1)$

$\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{OP}=(2,1,1)$　$\therefore\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{OP}=(-2,1,3)\approx(2,-1,-3)$

**【範例九】**

在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 $\theta$ 的正切值 $\tan\theta$。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為_____。（化為最簡分數）【104 年學測】



答：$\frac{25}{29}$

解：$\because$ 坡度為 $\frac{2}{5}$　$\therefore$ 可令四面體的高為 2　$\therefore$ 底邊長為 10

側面皆為等腰三角形，側面以底邊為底的高為 $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

側面的腰邊長為 $\sqrt{25+29}=\sqrt{54}$，側面以腰邊為底的高 $=\frac{10\times\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$

底面對角線長為 $10\sqrt{2}$

餘弦值 $=\dfrac{\left(\frac{10\times\sqrt{29}}{\sqrt{54}}\right)^2+\left(\frac{10\times\sqrt{29}}{\sqrt{54}}\right)^2-\left(10\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{10\times\sqrt{29}}{\sqrt{54}}\right)^2}$

$=1-\frac{200}{2\cdot\frac{100\times29}{54}}=1-\frac{54}{29}=-\frac{25}{29}\Rightarrow\left|-\frac{25}{29}\right|=\frac{25}{29}$

**【範例十】**

坐標空間中有一平面 $P$ 過 $(0,0,0)$，$(1,2,3)$ 及 $(-1,2,3)$ 三點。試選出正確的選項。

(1) 向量 $(0,3,2)$ 與平面 $P$ 垂直　(2) 平面 $P$ 與 $xy$ 平面垂直

(3) 點 $(0,4,6)$ 在平面 $P$ 上　(4) 平面 $P$ 包含 $x$ 軸

(5) 點 $(1,1,1)$ 到平面 $P$ 的距離是 1　【108 年學測】

答：(3)(4)

解：$O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$　$\overrightarrow{N}//\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(0,-6,4)$

取 $\overrightarrow{N}=(0,3,-2)$　$\therefore P:3y-2z=0$

(1) 應為 $(0,3,-2)$　(2) $xy$ 平面 $z=0\Rightarrow\overrightarrow{N'}=(0,0,1)$　$\because\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N'}\neq0$ $\therefore$ 不垂直

(3) $(0,4,6)$ 在 $3y-2z=0$ 上　(4) $x$ 軸 $\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$ 在 $3y-2z=0$ 上

(5) 距離 $=\frac{|3-2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$

**【範例十一】**

坐標空間中，設直線 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$，平面 $E_1:2x-3y-z=0$，平面 $E_2:x+y-z=0$。試選出正確的選項。

(1) 點 $(3,0,-1)$ 在直線 $L$ 上　(2) 點 $(1,2,3)$ 在平面 $E_1$ 上

(3) 直線 $L$ 與平面 $E_1$ 垂直　(4) 直線 $L$ 在平面 $E_2$ 上

(5) 平面 $E_1$ 與 $E_2$ 交於一直線　【107年學測】

答：(3)(5)

解：(1) $(3,0,-1)$ 不在直線 $L$ 上　(2) $(1,2,3)$ 不在平面 $E_1$ 上

(3) 直線 $L$ 方向向量為 $(2,-3,-1)$，平面 $E_1$ 法向量為 $(2,-3,-1)$，故直線 $L$ 垂直平面 $E_1$

(4) 直線 $L$ 不在平面 $E_2$ 上　(5) 兩平面垂直，交集為一直線

版權所有・請勿翻印

# 宏達高三指考加強班

■單機課程，報名後立即上課
■考前衝刺班：5月31日至6月30日

宏達升學教育機構　台南市中山路147號7樓　電話：06-2201833　網址：www.hdps.com.tw




**【範例十二】**

如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於 2 (即 $\overline{AB}=2$)，$K$ 為正方形 $ABCD$ 的中心，$M$ 、$N$ 分別為線段 $BF$ 、$EF$ 的中點。試問下列哪些選項是正確的？

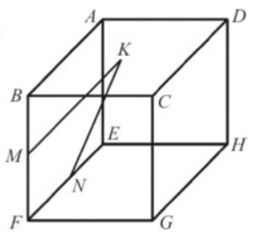
(1) $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2) (內積) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$

(3) $\overline{KM}=3$

(4) $\triangle KMN$ 為一直角三角形

(5) $\triangle KMN$ 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$




【98 年學測】

**答**：(1)(4)

**解**：(1) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2) $A(0,0,2)$，$C(2,2,2)$，$\therefore K(1,1,2)$，$M(2,0,1)$，$B(2,0,2)$

$\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$　$\therefore \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=2$

(3) $\overline{KM}=\left|\overrightarrow{KM}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ 何明珍藏重要考題

(4) $N(1,0,0)$　$\therefore \overline{MN}=\sqrt{2}$，$\overline{KN}=\sqrt{5}$，$\overline{KM}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{KN}^2=\overline{KM}^2+\overline{MN}^2$　$\therefore \triangle KMN$ 為直角三角形

(5) $\triangle KMN$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{KM}\cdot\overline{MN}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

**【範例十三】**

下列各直線中，請選出和 $z$ 軸互為歪斜線的選項。

(1) $L_1:\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$　(2) $L_2:\begin{cases}y=0\\x+z=1\end{cases}$　(3) $L_3:\begin{cases}z=0\\x+y=1\end{cases}$

(4) $L_4:\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$　(5) $L_5:\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}$

【105 年學測】

**答**：(3)(5)

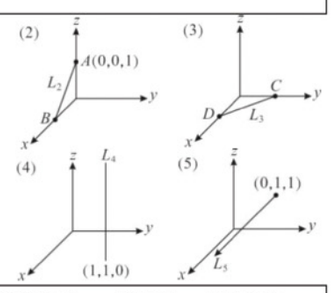
**解**：(1) $L_1$ 為 $y$ 軸　$\therefore$ 與 $z$ 軸有交於 $(0,0,0)$

(2) $L_2$ 即 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $z$ 軸交於 $(0,0,1)$

(3) $L_3$ 即 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 $z$ 軸互為歪斜線

(4) $L_4$ 與 $z$ 軸平行

(5) $L_5$ 與 $z$ 軸歪斜




**【範例十四】**

坐標空間中 $xy$ 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$，$A(8,0,0)$，$B(8,8,0)$，$C(0,8,0)$。另一點 $P$ 在 $xy$ 平面的上方，且與 $O,A,B,C$ 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 $A,B,P$ 三點的平面，則 $(b,c,d)=$_____。

【98 年學測】

**答**：$(0,2,8)$

**解**：$\because H(4,4,4)$　$\therefore P(4,4,t)$ $\overline{PO}=\sqrt{16+16+t^2}=6$ $\therefore t=2$

$\therefore P(4,4,2)$，$A(8,0,0)$，$B(8,8,0)$

$\therefore \overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{PA}=(4,-4,-2)$ $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{PB}=(4,4,-2)$

$\therefore \overrightarrow{N}=\left(\begin{vmatrix}-4&-2\\4&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&4\\-2&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&-4\\4&4\end{vmatrix}\right)=(16,0,32)\approx(1,0,2)$

$\therefore$ 過 $A,B,P$ 之平面 $x+2z=8$　$\therefore (b,c,d)=(0,2,8)$

**【範例十五】**

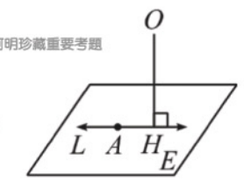
空間坐標中，直線 $L$ 上距離點 $Q$ 最近的點稱為 $Q$ 在 $L$ 上的投影點。已知 $L$ 為平面 $2x-y=2$ 上通過點 $(2,2,2)$ 的一直線，則下列哪些選項的點可能是原點 $O$ 在 $L$ 上的投影點。

【99 年學測】

(A) $(2,2,2)$ (B) $(2,0,2)$ (C) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0)$ (D) $(\frac{4}{5},-\frac{2}{5},-2)$ (E) $(\frac{8}{9},-\frac{2}{9},-\frac{2}{9})$

**答**：(A)(C)(E)

**解**：令 $A(2,2,2)$ 滿足條件須 $\begin{cases}H\in E\\\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$ 代入檢查 何明珍藏重要考題




(A) $H(2,2,2)$ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AH}=(2,2,2)\cdot(0,0,0)=0$ (合)

(B) $H(2,0,2)$ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AH}=(2,0,2)\cdot(0,-2,0)=0$

但 $H$ 不在 $E:2x-y=2$ 上(不合)，同理(C)(E)合但(D)不合

## 學測歸納重點《卯》　矩陣

**【範例一】**

小吳利用矩陣運算在紙上解一個三元一次聯立方程組，如下：

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&5&-3&-18\\0&1&-12&-15\end{bmatrix}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&a\\0&1&0&b\\0&0&1&c\end{bmatrix}$

則數對 $(a,b,c)=$_____。

**答**：$(4,-3,1)$

**解**：原式 $\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1&8\\0&1&-12&-15\\0&5&-3&-18\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-11&-7\\0&1&-12&-15\\0&0&57&57\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-11&-7\\0&1&-12&-15\\0&0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$　$\therefore (a,b,c)=(4,-3,1)$

**【範例二】**

設 $a,b,c,d,e,x,y,z$ 皆為實數，考慮矩陣相乘：

$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&5&7\\-4&6&e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&x&7\\0&y&7\\-11&z&23\end{bmatrix}$，則 $y=$_____。(化成最簡分數)

【107 年學測】

**答**：$\frac{7}{2}$

**解**：由已知 $\Rightarrow 7+2e=23\Rightarrow e=8$ $\Rightarrow\begin{cases}-3c-4d=0\\7c+8d=7\end{cases}\Rightarrow c=7,d=-\frac{21}{4}$

$\therefore y=5c+6d=35-\frac{63}{2}=\frac{7}{2}$

**【範例三】**

已知 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，並且其行列式(值)為 $\frac{5}{8}$。則 $a+d=$_____。(化為最簡分數)

【103 年學測】

**答**：$\frac{13}{8}$

**解**：由已知得 $\begin{cases}a+c=1\\b+d=1\end{cases}$　$a,b,c,d\ge 0$　且 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc=\frac{5}{8}$

$\therefore ad-(1-d)(1-a)=\frac{5}{8}$　$\therefore (a+d)-1=\frac{5}{8}$　$\therefore a+d=\frac{13}{8}$

**【範例四】**

線性方程組 $\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+y+3z=6\\x-y=6\\x-2y-z=8\end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$，則 $a=$_____、$b=$_____、$c=$_____、$d=$_____。

【105 年學測】

**答**：$(1,4,1,-2)$

**解**：$\begin{cases}x+2y+3z=0\cdots\cdots①\\2x+y+3z=6\cdots\cdots②\\x-y=6\cdots\cdots\cdots\cdots③\\x-2y-z=8\cdots\cdots④\end{cases}$　③−④: $y+z=-2\Rightarrow c=1,d=-2$

$\frac{2\times②-①}{3}:x+z=4\Rightarrow a=1,b=4$　$\therefore (a,b,c,d)=(1,4,1,-2)$

**【範例五】**

設一袋中有 8 個白球，4 個紅球，而手中持有一個白球，今自袋中每次任取一球然後將手中之球放入袋中，重複此一試驗，則

(1) 第二次試驗結果取到白球機率為_____。

(2) 實驗無限多次取到白球、紅球機率呈穩定狀態，此時取到白球機率為_____。

**答**：(1) $\frac{25}{36}$　(2) $\frac{9}{13}$

**解**：(1) 令 $a$ 表手中為白球，$b$ 表手中為紅球

狀況 $a$ 經過一次取球仍為狀況 $a$ 之機率為 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

狀況 $a$ 經過一次取球變為狀況 $b$ 之機率為 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

狀況 $b$ 經過一次取球變為狀況 $a$ 之機率為 $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

狀況 $b$ 經過一次取球仍為狀況 $b$ 之機率為 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 轉移矩陣 $=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$　$\therefore$ 所求 $=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\frac{25}{36}}\\\frac{11}{36}\end{bmatrix}$

$\therefore$ 第二次白球機率 $\frac{25}{36}$ 何明珍藏重要考題

(2) 令所佔機率各為 $x$，$1-x$　$\therefore \begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\1-x\end{bmatrix}$

$\therefore \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}(1-x)=x\Rightarrow x=\frac{9}{13}$

**【範例六】**

某一公司，有 $A,B,C$ 三個營業據點，開始時各有 36 位營業員，為了讓營業員了解各據點業務狀況，所以進行兩次調動。每次調動都是：

將當時 $A$ 據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到 $B$ 據點、$\frac{1}{6}$ 調到 $C$ 據點；

將當時 $B$ 據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到 $A$ 據點、$\frac{1}{3}$ 調到 $C$ 據點；

將當時 $C$ 據點營業員中的 $\frac{1}{6}$ 調到 $A$ 據點、$\frac{1}{6}$ 調到 $B$ 據點。

則調動兩次後，$C$ 據點有_____位營業員。

【104 年學測】

**答**：44

**解**：可令 $A,B,C$ 之轉移矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 調動兩次後 $A,B,C$ 三據點的狀況為

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}36\\36\\36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36\\30\\42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36\\28\\44\end{bmatrix}$　$C$ 據點有 44 位營業員

## 學測歸納重點《辰》　二次曲線

**【範例一】**

試問下列哪些選項中的二次曲線，其焦點（之一）是拋物線 $y^2=2x$ 的焦點？

(1) $y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(3) $x^2+\frac{4y^2}{3}=1$

(4) $8x^2-8y^2=1$　(5) $4x^2-4y^2=1$

【107年學測】

**答**：(1)(3)(4)

**解**：$y^2=2x$ 之焦點為 $\left(\frac{1}{2},0\right)$

(1) 焦點為 $\left(\frac{1}{2},0\right)$　(2) $c^2=4-3=1\Rightarrow c=\pm1$，故焦點為 $(\pm1,0)$

(3) 焦點為 $\left(\frac{1}{2},0\right)$　(4) 焦點為 $\left(\frac{1}{2},0\right)$

(5) $c^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，故焦點為 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

**【範例二】**

設 $\Gamma:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 為坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為 $\ell$。考慮動點 $(t,t^2)$，從時間 $t=0$ 時出發。當 $t>0$ 時，請選出正確的選項。

(1) 此動點不會碰到 $\Gamma$，也不會碰到 $\ell$　(2) 此動點會碰到 $\Gamma$，但不會碰到 $\ell$

(3) 此動點會碰到 $\ell$，但不會碰到 $\Gamma$　(4) 此動點會先碰到 $\Gamma$，再碰到 $\ell$

(5) 此動點會先碰到 $\ell$，再碰到 $\Gamma$

【106年學測】

**答**：(5)

**解**：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\Rightarrow$ 開口為上下的雙曲線

動點 $(t,t^2)\Rightarrow y=x^2\Rightarrow$ 開口向上的拋物線

從原點出發，先碰到漸近線 $l$，再碰到雙曲線 $\Gamma$

**【範例三】**

坐標平面上，若拋物線 $y=x^2+2x-3$ 的頂點為 $C$，與 $x$ 軸的交點為 $A$、$B$，則 $\cos\angle ACB=$_____。(化成最簡分數)

【107 年學測】

**答**：$\frac{3}{5}$

**解**：$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4=(x+3)(x-1)$

$A(-3,0)$、$B(1,0)$、$C(-1,-4)$

$\cos\angle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}\Rightarrow\cos\angle ACB=\frac{(-2,4)\cdot(2,4)}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}=\frac{3}{5}$

**【範例四】**

坐標平面上有一雙曲線，其漸近線為 $x-y=0$ 和 $x+y=0$。關於此雙曲線的性質，請選出正確的選項。

(1) 此雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}=-1$，其中 $r$ 為非零實數

(2) 此雙曲線的貫軸長等於共軛軸長

(3) 若點 $(a,b)$ 為此雙曲線在第一象限上一點，則當 $a>1000$ 時，$|a-b|<1$

(4) 若點 $(a,b)$, $(a',b')$ 為此雙曲線在第一象限上兩點且 $a<a'$，則 $b<b'$

(5) 此雙曲線同時對稱於 $x$ 軸與 $y$ 軸

【104 年學測】

**答**：(1)(2)(4)(5)

**解**：(1)(2) $\because$ 漸進線互相垂直

故為等軸雙曲線 $(2a=2b)$，中心為聯立方程式 $\begin{cases}x-y=0\\x+y=0\end{cases}$ 的解為 $(0,0)$

故可令 $\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$

(3) 若雙曲線為 $\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}=1\Rightarrow y^2=x^2-r^2\Rightarrow y=\pm\sqrt{x^2-r^2}$

$\because (a,b)$ 在第一象限　$\therefore b=\sqrt{a^2-r^2}$

$\therefore |a-b|=\left|a-\sqrt{a^2-r^2}\right|$ 未必小於 1

取 $a^2=41^2,r^2=40^2\Rightarrow|a-b|>1$

(4) $\because$ 兩種雙曲線在第一象限均為遞增 $\therefore a<a'\Rightarrow b<b'$

(5) 兩種雙曲線對稱軸均為 $x$ 軸，$y$ 軸

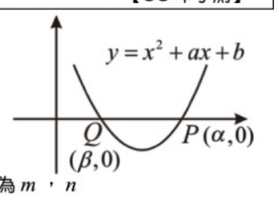
**【範例五】**

設 $a$、$b$ 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 $x$ 軸交於 $P$、$Q$ 兩點，且 $\overline{PQ}=7$。若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$ 與 $x$ 軸的兩交點為 $R$、$S$，則 $\overline{RS}=$_____。

【99 年學測】

**答**：$\sqrt{41}$

**解**：令 $x^2+ax+b=0$ 二根 $\alpha,\beta$




$\therefore \alpha-\beta=7$ $\therefore (\alpha-\beta)^2=49$ 何明珍藏重要考題

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=49$　$\therefore a^2-4b=49$

設 $R(m,0)$，$S(n,0)$ $\therefore x^2+ax+(b+2)=0$ 二根為 $m$，$n$

$\therefore \overline{RS}^2=(m-n)^2=(m+n)^2-4mn=a^2-4(b+2)=a^2-4b-8=49-8=41$

$\therefore \overline{RS}=\sqrt{41}$

**【範例六】**

設 $m,n$ 為正實數，橢圓 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 的焦點分別為 $F_1(0,2)$ 與 $F_2(0,-2)$。若此橢圓上有一點 $P$ 使得 $\triangle PF_1F_2$ 為一正三角形，則 $m=$_____，$n=$_____。

【101 年學測】

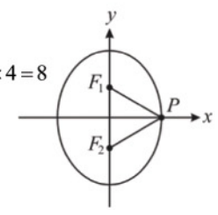
**答**：$m=12,n=16$

**解**：$F_1(0,2),F_2(0,-2)$　$\therefore 2c=\overline{F_1F_2}=4$

又 $\because \triangle PF_1F_2$ 為正三角形　$\therefore \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2\overline{F_1F_2}=2\times4=8$

$\therefore 2a=8$ $\therefore b^2=a^2-c^2=16-4=12$

$\therefore$ 橢圓方程式為 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$　$\therefore m=12,n=16$




**【範例七】**

有一個橢圓與一雙曲線有共同的焦點 $F_1$、$F_2$，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 $P$ 為此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，則 $\overline{F_1F_2}=$_____。

【98 年學測】

**答**：$\overline{F_1F_2}=16$

**解**：令橢圓為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\therefore \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a\cdots\cdots①$

$\therefore$ 雙曲線為 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$ $\therefore \left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2b\cdots\cdots②$

$①^2-②^2:4(\overline{PF_1}\times\overline{PF_2})=4(a^2-b^2)=4c^2$

$\therefore \overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=c^2$ $\therefore c^2=64$ 即 $c=8$ $\therefore \overline{F_1F_2}=2c=16$

**【範例八】**

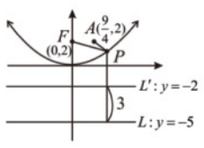
坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4},2)$、直線 $L:y=-5$ 與拋物線 $\Gamma:x^2=8y$。以 $d(P,L)$ 表示點 $P$ 到直線 $L$ 的距離。若點 $P$ 在 $\Gamma$ 上變動，則 $\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|$ 之最大值為_____。(化成最簡分數)

【99 年學測】

**答**：$\frac{21}{4}$

**解**：$\left|d(P,L)-\overline{AP}\right|=\left|3+d(P,L')-\overline{AP}\right|$ 何明珍藏重要考題

$=\left|3+\overline{PF}-\overline{AP}\right|\le\left|3+\overline{AF}\right|=\left|3+\frac{9}{4}\right|=\frac{21}{4}$




版權所有・請勿翻印