【大學入學考試指定考科數乙(選修)觀念統整】

第一重點：相關係數與迴歸線(含平均數與標準差)

(一) 1. $r=\dfrac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$ 用於$\underline{\sigma_X,\sigma_Y\text{已知}}$。

2. $r=\dfrac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum(x_i-\mu_x)^2\sum(y_i-\mu_y)^2}}$ 用於$\underline{\mu_X,\mu_Y\text{為整數}}$。

3. $r=\dfrac{\sum x_iy_i-n\mu_x\mu_y}{\sqrt{\left[\sum x_i^{\ 2}-n\mu_x^{\ 2}\right]\left[\sum y_i^{\ 2}-n\mu_y^{\ 2}\right]}}$ 用於$\underline{\sum x_iy_i\text{已知}}$。

(二) 重要觀念

(1) $-1\le r\le 1$

註：若$r=0$表示零相關，$0<|r|<0.3$表示低度相關，

$0.3\le|r|<0.7$表示中度相關，$0.7\le|r|\le 1$表示高度相關，

$r=\pm 1$又稱完全相關。

(2) 若$y_i=ax_i+b$ $\quad r_{xy}=\begin{cases}1,\text{若}a>0\\-1,\text{若}a<0\end{cases}$

註：取$a=1\quad\Rightarrow y=x_i+b$（即平移）$\quad\Rightarrow r_{xy}=1$

(3) 若$P_i=ax_i+b$，$Q_i=cy_i+d\Rightarrow r_{PQ}=\begin{cases}r_{xy}\ ,\ ac>0\\-r_{xy}\ ,\ ac<0\end{cases}$

(三) 迴歸線：迴歸線為$y-\mu_y=b\left(x-\mu_x\right)\to$必過$\left(\mu_x,\mu_y\right)$

$$b=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum(x_i-\mu_x)^2}=\frac{\sum x_iy_i-n\mu_x\mu_y}{\sum x_i^{2}-n\mu_x^{\ 2}}$$

【範例一】某校高三共有300位學生，數學科第一次段考、第二次段考成績分別以X,Y表示，且每位學生的成績用0至100評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為0.016，試問下列哪些選項是正確的？

(1) X與Y的相關情形可以用散布圖表示

(2) 這兩次段考的數學成績適合用直線$X=a+bY$表示X與Y的相關情形(a,b為常數，$b\neq 0$)

(3) $X+5$與$Y+5$的相關係數仍為0.016

(4) $10X$與$10Y$的相關係數仍為0.016

(5) 若$X'=\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X},Y'=\dfrac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$，其中$\mu_X,\mu_Y$分別為$X,Y$的平均數，$\sigma_X,\sigma_Y$分別為$\mu_X,\mu_Y$的標準差，則$X'$與$Y'$的相關係數仍為$0.016$

$\boxed{\text{解}}$：(1) X與Y相關情形可用散布圖或相關係數判斷

(2) 相關程度太低，不適合

(3)(4)(5)：可利用$r_{(aX+b,cY+d)}=\begin{cases} r_{XY}, ac>0 \\ -r_{XY}, ac<0 \end{cases}$

$\therefore$(3) $a=c=1\Rightarrow$相關係數

(4) $a=c=10\Rightarrow$ 相關係數$=0.016$

(5) $X'=\dfrac{1}{\sigma_X}X-\dfrac{\mu_X}{\sigma_X}$，$Y'=\dfrac{1}{\sigma_Y}Y-\dfrac{\mu_Y}{\sigma_Y}$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{\sigma_X}$，$c=\dfrac{1}{\sigma_Y}\Rightarrow ac>0$

$\therefore$相關係數$=0.016$ 選(1)(3)(4)(5)

【範例二】某種新藥的用量X（毫克數）與藥效期間Y（天數）的關係，經調查後的資料如下表：

X	3	4	6	8	9
Y	8	12	16	17	22

(1) 若X與Y的相關係數為$\sqrt{\dfrac{13}{k}}$，則$k=$________。

(2) Y對X的迴歸線為$y=ax+b$，則數對$(a,b)=$________。

(3) 若醫生用藥量為12毫克，試用迴歸線預估藥效可達________天。

$\boxed{\text{解}}$：(1) $\mu_X=6$，$\mu_Y=15$

$X_i-\mu_X$	-3	-2	0	2	3
$Y_i-\mu_Y$	-7	-3	1	2	7

$$\therefore r_{XY}=\frac{\sum(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\sum(X_i-\mu_X)^2\sum(Y_i-\mu_Y)^2}}=\frac{52}{\sqrt{26\cdot 112}}=\frac{2\cdot 26}{\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{28}}$$

$$=\sqrt{\frac{13}{14}}\qquad\therefore k=14$$

(2) 迴歸線 $y-\mu_Y=\dfrac{\sum(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{\sum(X_i-\mu_X)^2}(x-\mu_X)$

$\therefore y-15=\dfrac{52}{26}(x-6)\Rightarrow y=2x+3$

(3) $x=12\Rightarrow y=24+3=27$　　$\therefore$預估藥效可達27天

【範例三】設有4筆資料如下：

x	1	2	4	5
y	2	m	n	5

若以最小平方法求出 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$，

求數對 $(m,n)=$________。

$\boxed{\text{解}}$：$\mu_x=3$，又迴歸線過 (μ_x,μ_y)　　$\Rightarrow \mu_y=\dfrac{1}{2}\mu_x+\dfrac{3}{2}$

$\because \mu_x=3\Rightarrow \mu_y=3$　$\because \mu_y=3\Rightarrow \dfrac{m+n+7}{4}=3$　$\therefore m+n=5$

$\therefore n=5-m$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x_i-\mu_x & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_i-\mu_y & -1 & m-3 & 2-m & 2 \end{array}$$

$\therefore$迴歸線斜率$=\dfrac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum(x_i-\mu_x)^2}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore \dfrac{11-2m}{10}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore m=3$，$n=5-m=2$　　$\therefore (m,n)=(3,2)$

第二重點：常態分布與信賴區間

【範例一】國一學生30萬人，智商測驗的結果是「平均數100，標準差15」的常態分布，若以智商130以上做為甄選國一學生為資優生的門檻，則根據這次測驗的結果判斷下列選項中的敘述，哪些是正確的?

(1) 約有5%的國一學生通過資優生甄選門檻

(2) 約有15萬名國一學生的智商在100以上

(3) 超過20萬 國一學生智商介於85至115之間

(4) 隨機抽出1000名國一學生，可期望有25名資優生

(5) 如果某偏遠學校有14名的國一學生，那麼該校不會有資優生

解：常態分布為左右對稱的圖形，其平均數100位於圖形的中心位置

根據$68-95-99.7$經驗法則

智商130以上(即大於或等於二個標準的右側區域)占全部人數$\dfrac{5\%}{2}=2.5\%$

(1) $\times:\dfrac{1-95\%}{2}=2.5\%$

(2) $\bigcirc:30\times 50\%=15$(萬名)

(3) $\bigcirc:[85,115]$為距離平均數100一個標準差以內的區域，

約占全部的68%　　$\therefore 30\times 68\%=20.4$(萬名)

(4) $\bigcirc:1000\times 2.5\%=25$(名)

(5) $\times$:無法作此推論　　　　答：(2)(3)(4)

【範例二】某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比(以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在95%信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為$[0.50,0.58],[0.08,0.16]$。試問下列哪些選項是正確的？

(1) 甲地本次的參訪者中，54%的人聽過該產品

(2) 此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數

(3) 此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於95%

(4) 若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有95%的機會落在區間$[0.08,0.16]$

(5) 經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的四倍，則在95%信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半(即0.04)

解：(1) ×：此為統計上的推論，無法得知母體的資料

(2) ○：在95%信心水準下的抽樣誤差為$2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$，

在99.7%信心水準下的抽樣誤差為$3\sqrt{\dfrac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}$

$\therefore$甲城市擔心率的信賴區間$\left[0.4-\dfrac{3}{2}\times0.04,0.4+\dfrac{3}{2}\times0.04\right]=\left[0.34,0.46\right]$

(3) ×：$2\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{n_{甲}}}=0.04\Rightarrow4\times\dfrac{0.4\times0.6}{n_{甲}}=0.04\times0.04\Rightarrow n_{甲}=600$（人）

$2\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{n_{乙}}}=0.02\Rightarrow n_{乙}=2400$（人）

若不區分城市，則$\hat{p}=\dfrac{600\times0.4+2400\times0.6}{600+2400}=0.56$

故不區分城市的標準差為$\sqrt{\dfrac{0.56\times0.44}{3000}}<\sqrt{\dfrac{0.5\times0.5}{3000}}<0.01$

(4) ×：再次進行民調，$\hat{p}_{甲}$也會改變

(5) ○：甲城市全體民眾的「擔心率」是既存的數字，只是我們不知道，
所以此區間要不就涵蓋真正的p值，要不然就沒有涵蓋，
並無所謂機率的問題，我們可以說：「100個用同樣方法做出來的區間，約有95個區間會涵蓋真正的p值」

選(2)(5)

【範例三】想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 $\hat{p}$	0.52	0.59
$\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

(1) 全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例

(2) 在95%的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為$\left[0.48,0.56\right]$（計算到小數點後第二位，以下四捨五入）

(3) 此次抽樣的女性公民數少於男性公民數

(4) 如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例$\hat{p}$介於0.52與0.59之間

(5) 如果不區分性別，此次抽樣$\hat{p}$的標準差$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$介於$0.02$與$0.04$之間

$\boxed{解}$：(1) 此為樣本結果而非全體結果

(2) 所求為$\left[0.52-2\times 0.02\,,0.52+2\times 0.02\right]=\left[0.48\,,0.56\right]$

(3) 女性：$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1}}=0.02$，$\hat{p}=0.52$

$\therefore \dfrac{0.52\times 0.48}{n_1}=(0.02)^2 \quad \therefore n_1=\dfrac{0.52\times 0.48}{0.0004}=642$

男性：$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_2}}=0.04$，$\hat{p}=0.59$

$\therefore \dfrac{0.59\times 0.41}{n_2}=(0.04)^2 \quad \therefore n_2=\dfrac{0.59\times 0.41}{0.0016}=403 \qquad \therefore n_1>n_2$

(4) 不區分性別則比例$\hat{p}=\dfrac{n_1\times 0.52+n_2\times 0.59}{n_1+n_2}$顯然介於$0.52$與$0.59$之間

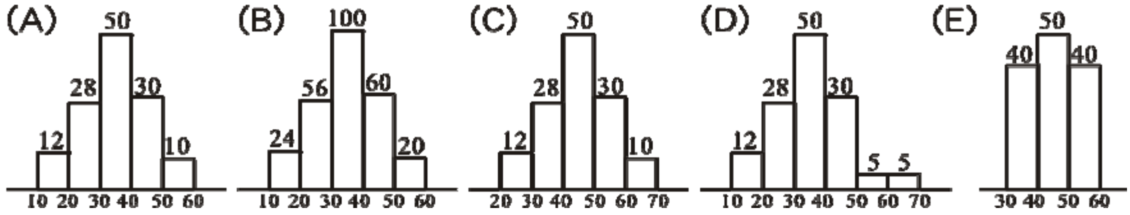
(5) 由(4) $\because 0.52<\hat{p}<0.59 \quad \therefore \hat{p}(1-\hat{p})<0.52\times 0.48$

$\therefore \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_1+n_2}}<\sqrt{\dfrac{0.52\times 0.48}{n_1}}=0.02$

選(2)(4)

第三重點：統計圖表的判讀

【範例一】下列五個直方圖表示的數據，何者之標準差最大？



答：(D)

【範例二】甲、乙、丙三位同學參加推薦甄選學科能力測驗，五科的成績如下表所示。設$\sigma_{甲}$，$\sigma_{乙}$，$\sigma_{丙}$分別代表甲、乙、丙三位同學五科成績的標準差。判斷下列那一選項表示$\sigma_{甲}$，$\sigma_{乙}$，$\sigma_{丙}$的大小關係？

科目 / 成績 / 學生	社會	國文	自然	英文	數學
甲	100	70	80	60	50
乙	90	60	70	50	40
丙	80	56	64	48	40

(A) $\sigma_{甲}>\sigma_{丙}>\sigma_{乙}$ (B) $\sigma_{丙}>\sigma_{甲}=\sigma_{乙}$ (C) $\sigma_{甲}>\sigma_{丙}=\sigma_{乙}$
(D) $\sigma_{乙}>\sigma_{甲}=\sigma_{丙}$ (E) $\sigma_{甲}=\sigma_{乙}>\sigma_{丙}$。

解：設甲班變量 $x_i=100,70,80,60,50$

乙班變量 $y_i=90,60,70,50,40$

丙班變量 $z_i=80,56,64,48,40$

(1) $y_i=x_i-10$ $\quad\therefore \sigma_{甲}=\sigma_{乙}$

(2) $\because z_i=\dfrac{4}{5}y_i$ $\quad\therefore \sigma_{丙}=\dfrac{4}{5}\sigma_{乙}$ $\quad\therefore \sigma_{丙}<\sigma_{乙}$

$\therefore \sigma_{甲}=\sigma_{乙}>\sigma_{丙}$ $\quad\therefore$選(E)

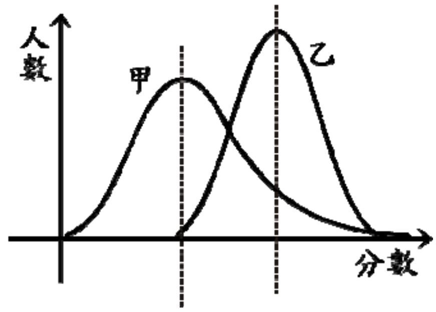
【範例三】某年聯考甲、乙兩科成績的直方圖如圖所示(由於考生人數眾多，成績分布的直方圖可視為平滑的曲線)，則下列那些敘述是正確的？

(A) 甲的算術平均數比乙的算術平均數大
(B) 甲的中位數比乙的中位數大
(C) 甲的全距比乙的全距大
(D) 甲的標準差比乙的標準差大
(E) 甲的眾數比乙的眾數大

解：① 由圖中知甲的算術平均數，中位數及眾數均比乙小

② 但甲的全距與標準差均比乙大

選(C)(D)



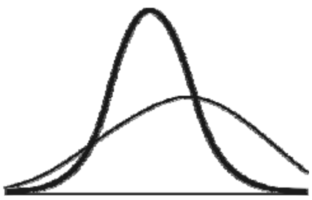
【範例四】甲、乙兩校有一樣多的學生參加數學能力測驗，兩校學生測驗成績的分布都很接近常態分布，其中甲校學生的平均分數為60分，標準差為10分；乙校學生的平均分數為65分，標準差為5分。若用粗線表示甲校學生成績分布曲線；細線表示乙校學生成績分布曲線，則下列哪一個分布圖較為正確？

(1)

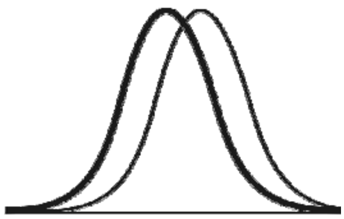
(2)

(3)

(4)



(5)



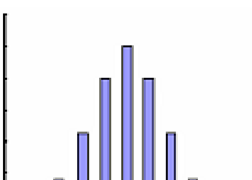
解：$\begin{cases} \text{乙校平均數較大} \quad \therefore \text{尖峰點較右側} \\ \text{乙校標準差較小,故分布較窄} \end{cases}$

又兩校人數相同∴曲線下面積應相同，故選(1)

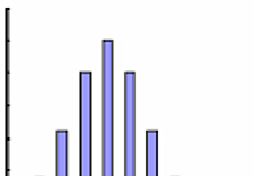
【範例五】袋中有大小相同的藍球3個、紅球2個，從袋中隨機取出1個記錄顏色後再放回袋中，連取10次中有x次取到紅球。

將$x = 0,1,2,3\cdots,10$所對應的發生機率y_i，$i = 0,1,2,3\cdots,10$繪出長條圖，下列選項中的圖形，何者最可能是繪出的長條圖？

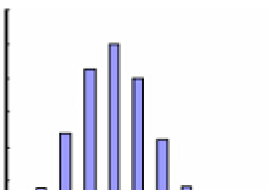
(1)



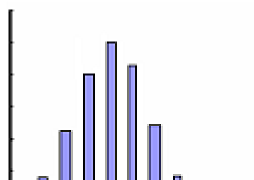
(2)



(3)



(4)

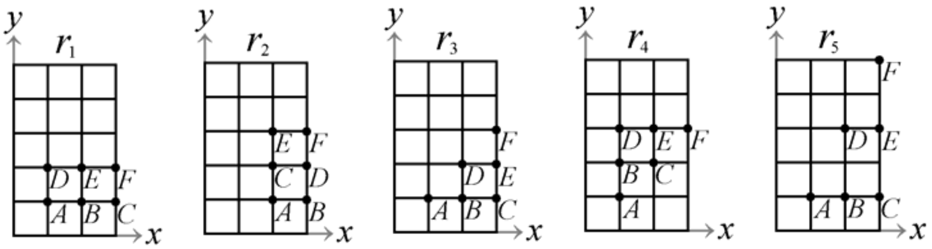


$\boxed{解}$：$p(\text{紅球})=\frac{2}{5}$，$p(\text{藍球})=\frac{3}{5}$

發生機率最大的次數為$[(n+1)p]=[(10+1)\cdot\frac{2}{5}]=[\frac{22}{5}]=4$次

又$p(x=3)=C_3^{10}(\frac{2}{5})^3(\frac{3}{5})^7>C_5^{10}(\frac{2}{5})^5(\frac{3}{5})^5=p(x=5)$，故選(3)

【範例六】下圖中有五組數據，每組各有A,B,C,D,E,F等六個資料點

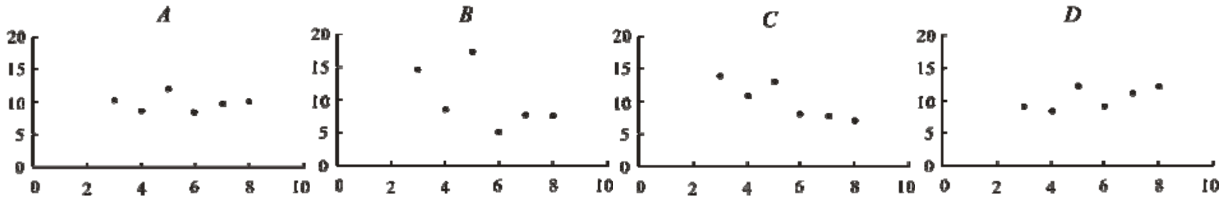


各組的相關係數由左至右分別為r_1,r_2,r_3,r_4,r_5，則下列關係式何者為真？

(A) $r_1=r_2$ (B) $r_2<r_3$ (C) $r_3>r_4$ (D) $r_3<r_5$ (E) $r_4=r_5$

$\boxed{解}$：$r_1=r_2=0$，$r_3=r_4=r_5$ 選(A)(B)(E)

【範例七】A,B,C,D是四組資料的散佈圖，如圖所示。利用最小平方法計算它們的迴歸直線，發現有兩組資料的迴歸直線相同，試問是哪兩組？



(1) A、B (2) A、C (3) A、D (4) B、C (5) B、D

答：(4)

第四重點：期望值與變異數

【範例一】設隨機變數 X 表示投擲一不公正骰子出現的點數，$P(X=k)$ 表示隨機變數 X 取值為 k 的機率。已知 X 的機率分布如下表：（x,y 為未知常數）

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	x	y	y	x	y	y

又知 X 的期望值等於 3。

（1）試求 x,y 之值。　（2）投擲此骰子兩次，試求點數和為 3 的機率。

【105 年指考數乙】

$\boxed{解}$：（1）由題意知，骰子各點數之機率和為 1，即 $x+y+y+x+y+y=1$

又期望值為 3，即 $x+2y+3y+4x+5y+6y=3$

$$\begin{cases}2x+4y=1\\5x+16y=3\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{12}$$

（2）點數和為 3 的機率為第一次擲 1 點且第二次擲 2 點或第一次擲 2 點且第二次擲 1 點

所求：$\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

【範例二】以隨機變數 X 表示投擲一顆公正骰子出現的點數，今隨機變數 $Y=3X+5$，求隨機變數 Y 的期望值________、變異數________與標準差________。

$\boxed{解}$：

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

$$E(X^2)=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times\frac{1}{6}=(\frac{1}{6}\times6\times7\times13)\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

$$\therefore Var(X)=E(X^2)-\left[(E(X)\right]^2=\frac{91}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{35}{12}$$

（1）$\because Y=3X+5\quad\therefore E(Y)=3E(X)+5=3\times\frac{7}{2}+5=\frac{31}{2}$

（2）$Var(Y)=9Var(X)=9\times\frac{35}{12}=\frac{105}{4}$　（3）$\sigma_Y=\sqrt{Var(Y)}=\frac{\sqrt{105}}{2}$

【範例三】有 100 元、200 元、300 元、400 元的紅包袋各一個，由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 個紅包袋，抽取後不放回。若每個紅包袋被抽取的機會都相等，則甲、乙、丙三人紅包金額總和的期望值為________元。

【107 年指考數乙】

$\boxed{解}$：$E\left(x\right)=\dfrac{100+200+300+400}{4}=250\Rightarrow 3E\left(x\right)=3\times 250=750$

【範例四】設隨機變數 X 滿足 $B(20,0.3)$ 則下列何者為真？

(1) X 的期望值為 6　　(2) X 的標準差大於 4

(3) $X=6$ 時的機率最大　　(4) $P(X=8)>P(X=10)$

(5) $P(X=4)<P(X=5)$

$\boxed{解}$：(1) X 的期望值為 $E(X)=np=20\times 0.3=6$

(2) X 的標準差 $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{20\times 0.3\times 0.7}=\sqrt{4.2}<4$

(3) $k=[(n+1)p]=[21\times\dfrac{3}{10}]=[6.3]=6$　　$\therefore p(x=6)$ 最大

(4) $P(X=8)>P(X=10)$

(5) $P(X=4)<P(X=5)$　　答：(1)(3)(4)(5)

【範例五】已知袋中有 5 顆球，其中 2 顆是紅色球，從袋中每次取出一球，取完均放 回，連取 24 次，設隨機變數 Y 表示取出紅球的比率

(1) 求 Y 的期望值________與標準差________。

(2) 重複此試驗多次，估計約 95% 的紅球比率 Y 所在的區間為________。

$\boxed{解}$：$\because$ 5 顆球中有 2 顆是紅色球，所以每次取到紅色球的機率 $p=\dfrac{2}{5}=0.4$

(1) Y 的期望值 $E\left(Y\right)=p=0.4$

標準差 $\sigma\left(Y\right)=\sqrt{\dfrac{p\left(1-p\right)}{n}}=\sqrt{\dfrac{0.4\times 0.6}{24}}=0.1$

(2) 由上述性質知：約有 95% 的紅球比率所在區間為

$\left[0.4-2\times 0.1,0.4+2\times 0.1\right]=\left[0.2,0.6\right]$

上述的結果也可以說是：

成功比率 Y 落在區間 $\left[0.2,0.6\right]$ 中的機率約為 95%

第五重點：條件機率與貝氏定理

條件機率

(1) 設A,B為樣本空間S中的任二事件，且A為一非空集合，

則$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$表在$A$發生的條件下，$B$發生的機率。

(2) $P(A'|B)+P(A|B)=\dfrac{P(A'\cap B)}{P(B)}+\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

$\therefore P(A'|B)=1-P(A|B)$

貝氏定理

設$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=S$（樣本空間）且$i\neq j$時，$A_i\cap A_j=\phi$，則對任意事件$B$

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B|A_k)P(A_k)}\quad(i=1,\cdots,n)$$

獨立事件

(1) A,B為二獨立事件，則$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

(2) A,B為二互斥事件，則$P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(3) 若A,B獨立時$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$

此時A'與B亦獨立即$P(A'|B)=P(A')$

【範例一】某校數學複習考有400位同學參加，評分後校方將此400位同學依總分由高到低排序：前100人為A組，次100人為B組，再次100人為C組，最後100人為D組。校方進一步逐題分析同學答題情形，將各組在填充第一題（考排列組合）和填充第二題（考空間概念）的答對率列表如下：

	A組	B組	C組	D組
第一題答對率	100%	80%	70%	20%
第二題答對率	100%	80%	30%	0%

請選出正確的選項：

(1) 第一題答錯的同學，不可能屬於B組

(2) 從第二題答錯的同學中隨機抽出一人，此人屬於B組的機率大於0.5

(3) 全體同學第一題的答對率比全體同學第二題的答對率高15%

(4) 從C組同學中隨機抽出一人，此人第一、二題都答對的機率不可能大於0.3 【100年指考數乙】

$\boxed{解}$：(1) 第一題答錯的同學中有20位屬於B組

(2) $P=\dfrac{20}{0+20+70+100}=\dfrac{2}{19}<0.5$

(3) 全體第一題答對率

$$=\frac{1}{4}\times 100\%+\frac{1}{4}\times 80\%+\frac{1}{4}\times 70\%+\frac{1}{4}\times 20\%=67.5\%$$

全體第二題答對率$=\dfrac{1}{4}\times 100\%+\dfrac{1}{4}\times 80\%+\dfrac{1}{4}\times 30\%+\dfrac{1}{4}\times 0\%=52.5\%$

$\therefore$全體第一題答對率比第二題答對率高15%

選(3)(4)

【範例二】某個城市的普查（全面調查）發現60%的高中生有打工的經驗，也發現70%的高中生有意願就讀大學。如果使用簡單隨機抽樣，由該城市的高中生中抽出一位同學。請選出正確的選項。

(1) 被抽出同學有意願就讀大學的機率為0.7

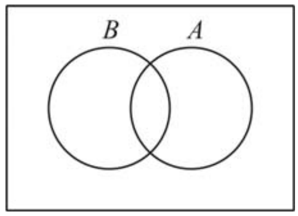
(2) 被抽出同學有打工的經驗、且有意願就讀大學的機率至多為0.6

(3) 被抽出同學有打工的經驗、且有意願就讀大學的機率至少為0.35

(4) 被抽出同學有打工的經驗、但是無意願就讀大學的機率為0.18

【101年指考數乙】

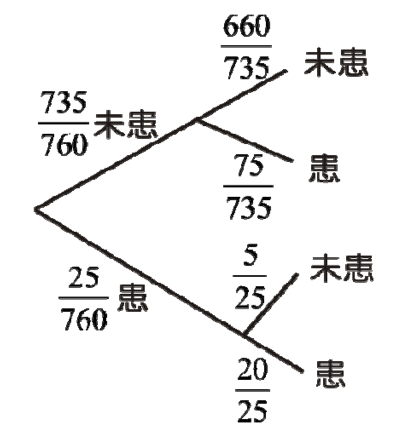
解：令A表選取高中生有打工經驗的事件，
B表選取高中生有意願就讀大學的事件
$\therefore P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$



(1) $P(B)=0.7$
(2) $P(A\cap B)\le P(A)=0.6$
(3) $\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$\therefore P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1=0.3$
(4) $\because P(A)=0.6$，$P(B')=1-P(B)=0.3$ $\quad\therefore P(A)\cdot P(B')=0.18$
但必須A、B為獨立事件時$P(A\cap B')=P(A)P(B')=0.18$時才會成立
本小題無法判別A與B是否獨立
選(1)(2)

【範例三】某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率(即偵測錯誤的機率)。共有760人接受此血液偵測技術實驗，實驗前已知樣本中有735人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判斷為未患老年癡呆症者有665人，其中真正未患老年癡呆症有660人。試問此血液偵測技術的誤判率為________。(化為最簡分數) 【98年指考數乙】

解：



$\therefore P(\text{誤判率})=\dfrac{735}{760}\times\dfrac{75}{735}+\dfrac{25}{760}\times\dfrac{5}{25}=\dfrac{2}{19}$

【範例四】保險公司把投保竊盜險的住宅分為A,B兩級，其所占比率分別為$60\%,40\%$。過去一年A,B兩級住宅遭竊的比率分別$15\%,5\%$為。據此，公司推估未來一年A,B、兩級住宅被竊的機率分別為$0.15,0.05$。今A級住宅中的20%經過改善，重新推估這些改善過的住宅未來一年被竊的機率會降為0.03；而其他住宅被竊機率不變。根據以上資料，試選出正確的選項。
(1) 全體投保的住宅中，過去一年遭竊的比率為12%
(2) 過去一年遭竊的投保住宅中，A級所占的比率超過90%

(3) 推估未來一年，改善過的A級住宅的被竊機率為原來的$\frac{1}{5}$

(4) 經改善後，推估未來一年被竊機率，全體投保的A級住宅會小於全體投保的B級住宅

(5) 經改善後，推估未來一年全體投保的住宅被竊機率小於0.11

【107 年指考數乙】

$\boxed{解}$：(1) $p=0.6\times0.15+0.4\times0.05=0.11$

(2) $p=\dfrac{0.6\times0.15}{0.11}=\dfrac{9}{11}<0.9$

(3) $p=\dfrac{0.6\times0.2\times0.03}{0.6\times0.2\times0.15}=\dfrac{1}{5}$

(4) $p(A)=0.12\times0.03+0.48\times0.15=0.0756$　　$p(B)=0.05$

(5) $p=0.12\times0.03+0.48\times0.15+0.4\times0.05=0.0956<0.11$　選(3)(5)

第六重點：應用題中的極值探討

（甲）二次函數配方

【範例一】設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 上的最大值為 7，最小值為 3，求數對 (a,b) 的所有可能值________。

【101 年指考數乙】

$\boxed{解}$：$f(x)=a(x+1)^2+b-a$，$-1\le x\le 1$

（1）$a=0$ 時，$f(x)=b$ 非二次函數(不合)

（2）$a>0$ 時，最大值 $f(1)=3a+b=7$

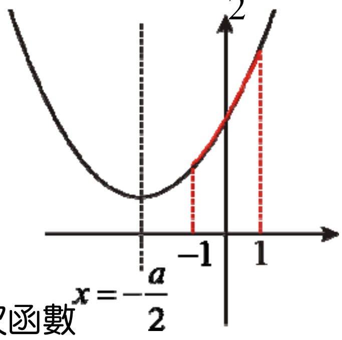
最小值 $f(-1)=b-a=3$ $\quad\therefore (a,b)=(1,4)$

（3）$a<0$ 時，最大值 $f(-1)=b-a=7$

最小值 $f(1)=3a+b=3$ $\quad\therefore (a,b)=(-1,6)$

【範例二】設 $a\in R$, $f(x)=x^2+ax+4$, $(-1\le x\le 1)$，在 $2\le a\le 4$ 時，$f(x)$ 的最大值為(A) $5-a$ (B) $5+a$ (C) $8+2a$ (D) $20+4a$ (E) $4-\dfrac{a^2}{4}$

$\boxed{解}$：由已知 $f(x)=(x+\dfrac{a}{2})^2+4-\dfrac{a^2}{4}\,(-1\le x\le 1)$ 　對稱軸 $x=-\dfrac{a}{2}$



但 $\because 2\le a\le 4$ $\quad\therefore 1\le\dfrac{a}{2}\le 2$ $\quad\therefore -1\ge -\dfrac{a}{2}\ge -2$

此時 $-1\le x\le 1$ 時

最大 $f(1)=a+5$

最小 $f(-1)=-a+5$

【範例三】二次函數

$$f(x)=2\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{(-2-1)(-2-4)}+7\cdot\frac{(x+2)(x-4)}{(1+2)(1-4)}+2\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{(4+2)(4-1)},$$

試求 $f(x)$ 的最大值為________。

$\boxed{解}$：$f(-2)=f(4)=2$，　$f(1)=7$

$\because f(-2)=f(4)=2\Rightarrow$ 對稱軸 $x=\dfrac{-2+4}{2}=1$ $\quad\therefore x=1$ 時，$f(1)=7$ 最大

【範例四】有 9 名小學生的年齡分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_9$，其算術平均數為 10，標準差為 5，若令 $f(x)=(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_9-x)^2$，下列何者為真？

（1）$f(10)=7$ （2）$f(10)=225$ （3）${x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_9}^2=1125$

（4）$f(5)$ 是極小值 （5）$f(10)<f(2)$

$\boxed{解}$：$\mu_x = 10$，$\sigma_x = 5$

(1)(2) 得$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i - 10)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}f(10)} = 5 \quad \therefore f(10) = 225$

(3) $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i^{\,2} - \mu_x^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i^{\,2} - 10^2} = 5$

$\therefore \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i^{\,2} - 100 = 25 \quad \therefore \sum_{i=1}^{9}x_i^{\,2} = 1125$

(4)(5) $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_9 - x)^2$最小時$x = \mu_x = 10$

$\therefore f(10)$為極小值 $\quad \therefore f(2) > f(10)$

選(2)(3)(5)

（乙）線性規劃

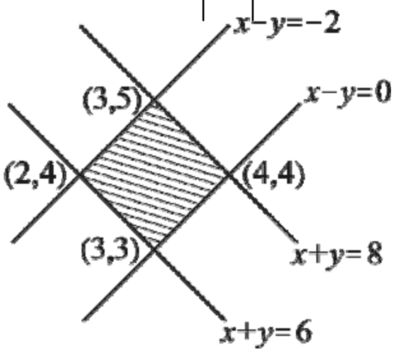
【範例一】令$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$為坐標平面上兩向量。已知$\overrightarrow{A}$的長度為1，$\overrightarrow{B}$的長度為2且$\overrightarrow{A}$與$\overrightarrow{B}$之間的夾角為$60^\circ$。令$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B}$，其中$x, y \in \mathbb{R}$且符合$6 \le x + y \le 8$以及$-2 \le x - y \le 0$，則內積$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$的最大值為________。

【102 年學測】

$\boxed{解}$：$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) \cdot \left(x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B}\right) = x\left|\overrightarrow{A}\right|^2 + (x + y)\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + y\left|\overrightarrow{B}\right|^2$

$= x + (x + y) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 4y = 2x + 5y$

$$\therefore 2x + 5y \begin{cases} (2,4) \to 24 \\ (3,3) \to 21 \\ (4,4) \to 28 \\ (3,5) \to 31(最大) \end{cases}$$

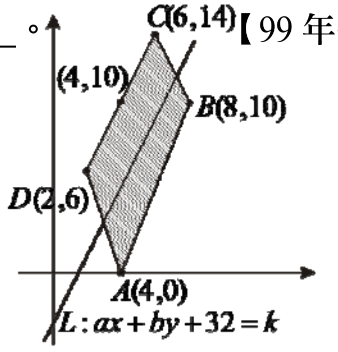


【範例二】已知一個線性規劃問題的可行解區域為四邊形$ABCD$及其內部，其中$A(4,0), B(8,10)$，$C(6,14), D(2,6)$為坐標平面上的四個點。若目標函數$k = ax + by + 32$（a, b為實數）在四邊形$ABCD$的邊界上一點$(4,10)$有最小值18，則$a =$________，$b =$________。【99 年指考數乙】

$\boxed{解}$：$\because (4,10)$在$\overline{CD}$上$\Rightarrow L // \overline{CD}$

故$\overline{CD}$上的點代入均為最小值18

$\therefore \begin{cases} 2a + 6b + 32 = 18 \\ 4a + 10b + 32 = 18 \end{cases} \quad \therefore a = 14$，$b = -7$

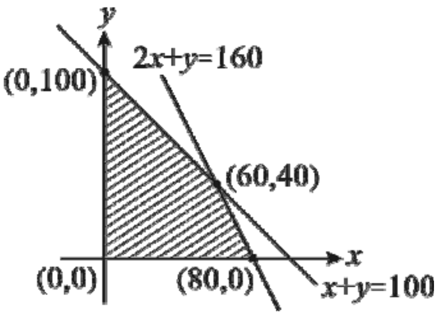


【範例三】某公司生產兩種商品，均以同型的箱子裝運，其中甲商品每箱重20公斤，乙商品每箱重10公斤。公司出貨時，每趟貨車最多能運送100箱，最大載重為1600公斤。設甲商品每箱的利潤為1200元，乙商品每箱的利潤為1000元。

(1) 設公司調配運送時，每趟貨車裏的甲商品為x箱，乙商品為y箱。試列出x,y必須滿足的聯立不等式。

(2) 當x,y的值各為多少時，可使每趟貨車出貨所能獲得的利潤為最大？此時利潤為多少元？　　　　【101年指考數乙】

$\boxed{解}$：(1) $\begin{cases} x,y\ge 0 \\ x+y\le 100 \\ 20x+10y\le 1600 \Rightarrow 2x+y\le 160 \end{cases}$　　$(x,y\in\mathbb{Z})$



(2) 利潤 $f(x,y)=1200x+1000y$

可行解範圍：

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,0)$	0
$(80,0)$	96000
$(60,40)$	$112000(Max)$
$(0,100)$	100000

$\therefore x=60, y=40$時利潤最大為112000元。

第七重點：聯立方程組及其幾何意義

(甲) 加減消去法

【範例一】當n為正整數時，令$x=a_n$、$y=b_n$、$z=c_n$為三元一次聯立

方程組$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$ 之唯一解，則$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$________。

$\boxed{解}$：$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2z \\ x=z \end{cases}$代入第3式

得$-2nz-2nz+3z=8n \Rightarrow z=\dfrac{8n}{3-4n}=x \quad \therefore a_n=\dfrac{8n}{3-4n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{3-4n}=-2$

(乙) 矩陣列運算

【範例一】設a,b,c為實數，下列有關線性方程組$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$的敘述

哪些是正確的？

(1) 若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2) 若此線性方程組有解，則$11a-3b\neq 7$

(3) 若此線性方程組有解，則$c=14$

(4) 若此線性方程組無解，則$11a-3b=7$

(5) 若此線性方程組無解，則$c\neq 14$　　　　【 98年學測 】

$\boxed{解}$：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 4 & b & -1 \\ 2 & 10 & 7 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & b-3a & -4 \\ 0 & 6 & 7-2a & c-2 \end{bmatrix}\times 3$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & b-3a & -4 \\ 0 & 0 & 7-11a+3b & c-14 \end{bmatrix}$

故① $7-11a+3b=0$，$c-14\neq 0$無解，即$11a-3b=7$，$c\neq 14$無解

② $7-11a+3b=0$，$c=14$　無限多解

③ $7-11a+3b\neq 0$　唯一解　　　　選(4)(5)

（丙）克拉瑪公式

【範例一】設$a\in\mathbb{R}$，$\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a\\2x+(5+a)y=8\end{cases}$

（1）若方程組無解，則$a=$________。

（2）若方程組無限組解，則$a=$________。

（3）若方程組恰有一組解，則$a\neq$________。

$\boxed{解}$：$\Delta=\begin{vmatrix}a+3&4\\2&5+a\end{vmatrix}=a^2+8a+7=(a+1)(a+7)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}5-3a&4\\8&5+a\end{vmatrix}=-3a^2-10a-7=-(a+1)(3a+7)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}a+3&5-3a\\2&8\end{vmatrix}=14(a+1)$

（1）無解時　$\Delta=0$但Δ_x或$\Delta_y\neq0$　$\therefore a=-7$

（2）無限組解時　$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$　$\therefore a=-1$

（3）恰有一組解時　$\Delta\neq0$　$\therefore a\neq-1,-7$

（丁）利用反方陣

【範例一】考慮一次方程組$M_t\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，其中$M_t=\begin{bmatrix}t&1\\3-t&t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\t+3&3t+1\end{bmatrix}$，$t\in R$，

則：

(1)使此方程組有解的充要條件為________。

(2)若$t=0$，$a=0$，$b=-1$，則$\det(M_0{}^{-1})=$________，且

$(x,y)=$________。　　　　【84 年日大】

$\boxed{解}$：（1）有解充要條件為$\det M_t\neq0\ \therefore\begin{vmatrix}t&1\\3-t&t+1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\t+3&3t+1\end{vmatrix}\neq0$

$\therefore(t^2+2t-3)(t-5)\neq0\Rightarrow t\neq-3$，1，5

（2）$M_0=\begin{bmatrix}0&1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}$　$\therefore\det(M_0{}^{-1})=\dfrac{1}{\det M_0}=\dfrac{1}{15}$又

$$\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}7&-1\\-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{15}\\-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$\therefore(x,y)=(\dfrac{1}{15},\dfrac{-1}{5})$

第八重點：級數求和(含收斂與發散討論)

(甲)收斂與發散

【範例一】設$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$是一公比為$\dfrac{1}{2}$的無窮等比數列且$a_1=1$。試問以下哪些數列會收斂？

(1) $-a_1,-a_2,\cdots,-a_n,\cdots$ (2) $a_1^2,a_2^2,\cdots,a_n^2,\cdots$ (3) $\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\cdots,\sqrt{a_n},\cdots$

4) $\dfrac{1}{a_1},\dfrac{1}{a_2},\cdots,\dfrac{1}{a_n},\cdots$ (5) $\log a_1,\log a_2,\cdots,\log a_n,\cdots$【106 年指考數乙】

解：無窮等比數列收斂$\Leftrightarrow -1<r\le 1$；無窮等差數列公差不為$0$則發散

(1) 公比為$\dfrac{1}{2}\Rightarrow$收斂 (2) 公比為$\dfrac{1}{4}\Rightarrow$收斂 (3) 公比為$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$收斂

(4) 公比為$2\Rightarrow$發散

(5) 為等差數列，公差為$\log a_2-\log a_1=\log\dfrac{a_2}{a_1}=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2<0$

發散到$-\infty$ 選(1)(2)(3)

【範例二】已知數列$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle,\langle c_n\rangle,\langle d_n\rangle,\langle e_n\rangle$定義如下：

$a_n=(-1)^n$；$b_n=a_n+a_{n+1}$；$c_n=(-\dfrac{\sqrt{10}}{3})^n$；$d_n=\dfrac{1}{3}c_n$；$e_n=\dfrac{1}{c_n}$；

其中$n=1,2,3,\cdots$。下列選項中，試選出會收斂的無窮級數。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$

【107 年指考數乙】

解：無窮等比級數收斂$\Rightarrow |\,r\,|<1$ 故(1)(3)(4)均不合

(2) $b_n=a_n+a_{n+1}=0$ 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收斂

(5) $e_n=\dfrac{1}{c_n}=\left(\dfrac{-3}{\sqrt{10}}\right)^n$ 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$收斂 選(2)(5)

【範例三】無窮級數$1+\dfrac{1}{1+x}+(\dfrac{1}{1+x})^2+\cdots+(\dfrac{1}{1+x})^n+\cdots$，則

(1) 收斂時，x範圍為________，(2) 若此級數和為$2x$，則$x=$________。

解：(1) 收斂時公比$\left|\dfrac{1}{1+x}\right|<1$ $\therefore |1+x|>1$ $\therefore x+1>1$或$x+1<-1$

$\therefore x>0$或$x<-2$

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}=2x$ $\quad\therefore \dfrac{1+x}{x}=2x$ $\quad\therefore 2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$ $\quad\therefore x=1$或$-\dfrac{1}{2}$(不合)

$\boxed{\text{(乙)無窮等比級數}}$

【範例一】(1) 已知a、b、c為正整數且$2<a<b<c\le 9$，若

$0.\overline{a}+0.0\overline{b}+0.00\overline{c}+\cdots$為無窮等比級數，則序$(a,b,c)=$________。

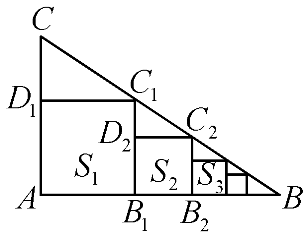
(2) 求(1)之級數和為________。

$\boxed{\text{解}}$：(1) 所求$=\dfrac{a}{9}+\dfrac{b}{90}+\dfrac{c}{900}+\cdots$， $\quad\therefore \dfrac{a}{9}\cdot\dfrac{c}{900}=(\dfrac{b}{90})^2$

$\therefore b^2=ac$，$\therefore (a,b,c)=(4,6,9)$。

(2) 公比$\dfrac{\frac{b}{90}}{\frac{a}{9}}=\dfrac{b}{10a}=\dfrac{6}{40}=\dfrac{3}{20}$ $\quad\therefore$級數和$=\dfrac{\frac{a}{9}}{1-\frac{3}{20}}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{17}{20}}=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{20}{17}=\dfrac{80}{153}$

【範例二】已知$\triangle ABC$為直角三角形，$\overline{AB}=24,\overline{AC}=16$，
在$\triangle ABC$內作一個內接正方形$AB_1C_1D_1$，其面積
為S_1，在ΔB_1BC_1內作第二個內接正方形$B_1B_2C_2D_2$，
其面積為S_2，仿此繼續進行，求所有正方形面積的和。



$\boxed{\text{解}}$：設$\overline{AB_1}=\overline{AD_1}=x$ $\quad\because \Delta CD_1C_1\sim\Delta CAB$

$\therefore \dfrac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1C_1}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$ $\quad\Rightarrow \dfrac{16-x}{x}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore x=\dfrac{48}{5}$ $\quad\therefore a_1=(\dfrac{48}{5})^2=\dfrac{2304}{25}$

$\therefore r=(\dfrac{\overline{C_2B_2}}{\overline{C_1B_1}})^2=(\dfrac{\overline{C_1B_1}}{\overline{CA}})^2=(\dfrac{48/5}{16})^2=(\dfrac{3}{5})^2$ $\quad\therefore S=\dfrac{(\frac{48}{5})^2}{1-(\frac{3}{5})^2}=144$

【範例三】數列$a_1,a_2,\cdots$中，其奇數項是一個公比為$\dfrac{1}{3}$的等比數列，而偶數項是一個公比為$\dfrac{1}{2}$的等比數列，且$a_1=3,a_2=2$。試選出正確的選項。

(1) $a_4>a_5>a_6>a_7$ $\quad$ (2) $\dfrac{a_{10}}{a_{11}}>10$ $\quad$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$ $\quad$ (5) $\sum\limits_{n=1}^{100}a_n>9$ $\quad$ 【109年指考數乙】

$\boxed{解}$：由題意可知$a_{2k+1}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{3^{k-1}}$ ，$a_{2k}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2^{k-2}}$

(1) $a_4=1,a_5=\frac{1}{3},a_6=\frac{1}{2},a_7=\frac{1}{9}$，故$a_4>a_6>a_5>a_7$

(2) $\frac{a_{10}}{a_{11}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{81}}=\frac{81}{8}>10$

(3) $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{3^{k-1}}=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k-2}}=0$

奇數項偶數項皆收斂到0，因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(4) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2^{k-2}}{3^{k-1}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=0$

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{3^{k-1}}{2^{k-1}}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ 發散，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$發散

(5) $\sum\limits_{n=1}^{100}a_n=\frac{3\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}\right)}{1-\frac{1}{3}}+\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{50}+4-4\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$

$<\frac{9}{2}+4=\frac{17}{2}<9$ 選(2)(3)

(丙)極限

【範例一】設n為正整數，方程式$x^2-2x-n=0$的兩根為a_n與b_n，且$a_n>b_n$。試問下列哪些選項是正確的?

(1) $a_n>0$對所有n皆成立　(2) $a_n+b_n=2$對所有n皆成立

(3) $b_{n+1}>b_n$對所有n皆成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{n}=1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$

$\boxed{解}$：$a_n=1+\sqrt{1+n}$，$b_n=1-\sqrt{1+n}$

(1) $a_n>0$　(2) $a_n+b_n=2$　(3) $\forall n\in N$，$b_{n+1}<b_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot a_{n+1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{1+n})(1+\sqrt{2+n})}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2+n}}{\sqrt{n}}\right)=1\times1=1$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}}=2$ ，選(1)(2)(4)(5)

【範例二】設$\langle a_n\rangle$為一等差數列。已知$a_2+a_4+a_6=186$ ，$a_3+a_7=110$ 。

令$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 。則極限$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n^2}=$________。 【105 年指考數乙】

$\boxed{解}$：$a_2+a_4+a_6=186\Rightarrow 3a_4=186\therefore a_4=62$

$a_3+a_7=110\Rightarrow 2a_5=110\therefore a_5=55$ ，可得$d=a_5-a_4=-7,a_1=83$

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}\left[166-7(n-1)\right]=-\frac{7}{2}n^2+\frac{173}{2}n$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=-\frac{7}{2}$$

第九重點：矩陣

（甲）基本矩陣運算

【範例一】一實驗室培養兩種菌，令$\langle a_n \rangle$和$\langle b_n \rangle$分別代表兩種培養菌在時間點n的數量，彼此有如下的關係：$a_{n+1}=2(a_n+b_n),\ b_{n+1}=2b_n\ (n=0,1,2,\cdots)$。

若二階方陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，(其中$n=0,1,2,\cdots$)，則

$a=$______，$b=$______，$c=$______，$d=$______。　【94年指考數乙】

解：$\because a_{n+1}=2(a_n+b_n),b_{n+1}=2b_n$　$\therefore \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\qquad \therefore a=8,b=24,c=0,d=8$$

（乙）二階反方陣

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

【範例一】x,c為實數，方陣$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$。已知$A$的反方陣恰好是$B$的$c$倍(其中$c\neq 0$)，則數對$(x,c)=$________。　【105年指考數乙】

解：$A^{-1}=\frac{1}{3x+4}\begin{bmatrix} x & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}\Rightarrow x=3,c=\frac{1}{3x+4}=\frac{1}{13}$

【範例二】考慮一次方程組$M_t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，其中

$M_t=\begin{bmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{bmatrix},t\in R$，則

(1)使此方程組恆有解的充分必要條件為________。

(2)若$t=0,a=0,b=-1$，

則$\det(M_0^{-1})=$______，$(x,y)=$________。【84年日大】

解：(1) $|M_t|=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3-t & t+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ t+3 & 3t+1 \end{vmatrix}\neq 0$　$(t^2+2t-3)(t-5)\neq 0$　$\therefore t\neq 1,-3,5$

(2) $M_0=\begin{bmatrix}0&1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}\therefore \det(M_0^{-1})=\det(M_0)^{-1}=(21-6)^{-1}=\dfrac{1}{15}$

且$\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$$\therefore\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\6&7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{15}&\frac{-1}{15}\\\frac{-6}{15}&\frac{3}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{15}\\\frac{-1}{5}\end{bmatrix}\qquad\therefore(x,y)=(\frac{1}{15},-\frac{1}{5})$$

（丙）轉移矩陣

【範例一】某地區有甲、乙、丙三家牛乳商，根據調查，甲公司每年保留60%的顧客，而轉向乙公司與丙公司訂購的顧客各佔20%，乙公司每年保留40%的顧客而轉向甲公司與丙公司訂購的顧客分別佔40%與20%，丙公司每年保留20%的顧客，而轉向甲公司與乙公司訂購的顧客分別佔60%與20%，若目前三家公司的市場佔有率分別為20%，20%，60%，且顧客人數不變，則二個觀察期後，這三家公司的預估市場佔有率為何？

解：此馬克夫鏈推移矩陣為$A=\begin{bmatrix}0.6&0.4&0.6\\0.2&0.4&0.2\\0.2&0.2&0.2\end{bmatrix}$

$\therefore$一個觀察期後佔有率為$A\begin{bmatrix}0.2\\0.2\\0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.56\\0.24\\0.20\end{bmatrix}$

二個觀察期後佔有率為$C=A\cdot\begin{bmatrix}0.56\\0.24\\0.20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.552\\0.248\\0.20\end{bmatrix}$

$\therefore$甲佔55.2%，乙佔24.8%，丙佔20%

【範例二】某縣縣政府每週五對全縣居民發放甲、乙兩種彩券，每位居民均可憑身分證免費選擇領取甲券一張或乙券一張。根據長期統計，上週選擇甲券的民眾會有85%在本週維持選擇甲券、15%改選乙券；而選擇乙券的民眾會有35%在本週改選甲券、65%維持乙券。所謂穩定狀態，係指領取甲券即乙券的民眾比例在每週均保持不變。

(1) 試寫出描述上述現象的轉移矩陣。

(2) 試問領取甲券和乙券民眾各占全縣居民百分比多少時，會形成穩定狀態？　　【106年指考數乙】

$\boxed{解}$：(1) $\begin{array}{c|cc} & 甲 & 乙 \\ \hline 甲 & 0.85 & 0.35 \\ 乙 & 0.15 & 0.65 \end{array}$

(2) 設領取甲券占a，領取乙券為$1-a$

$$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} \Rightarrow a=0.7=70\%$$

所以領取甲券占70%，領取乙券占30%

第十重點：向量與面積

(甲) 二度與三度空間的面積

(1) $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=r\cdot s=\dfrac{abc}{4R}$

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|$

(若 $\overrightarrow{AB}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(b_1,b_2)$)

(3) 三度空間的面積：設 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3),\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$，

則 $\triangle OAB$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$

【範例一】設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 所張平行四邊形面積為 3，則以 $3\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 為所張出的平行四邊形面積為________。

解：令 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ $\quad\therefore \left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|=3$

$3\vec{a}+\vec{b}=(3a_1+b_1,3a_2+b_2)\quad \vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

$\therefore$ 所求 $=\left|\begin{vmatrix}3a_1+b_1 & 3a_2+b_2\\ a_1-b_1 & a_2-b_2\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}3a_1+b_1 & a_1-b_1\\ 3a_2+b_2 & a_2-b_2\end{vmatrix}\right|$

$=\left|\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right|=3\times\left|-4\right|=12$

【範例二】考慮坐標平面上相異五點 O,A,B,C,D。已知向量 $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$，且向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐標表示為 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$，試回答下列問題。【108 年指考數乙】

(1) 試以坐標表示向量 $\overrightarrow{DC}$。

(2) 若 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$，試利用二階行列式與面積的關係，求 $\triangle OCD$ 的面積。

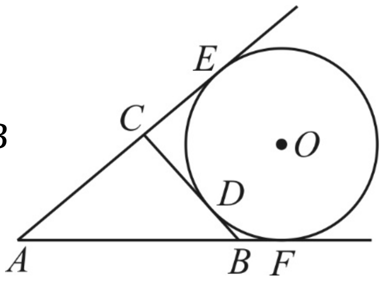
解：(1) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{AB}=-3(3,-4)=(-9,12)$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(3,-4)+(1,2)=(4,-2)$

$\therefore \overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}=(3,6)$；$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}=(12,-6)$

$\therefore \triangle OCD$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 6\\ 12 & -6\end{vmatrix}\right|=45$

（乙）向量運算



【範例一】如圖，已知圓O與直線BC、直線AC、直線AB均相切，且分別相切D,E,F。又$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=6$。

（1）假設$\overline{BF}=x$，試利用x分別表示$\overline{BD}$，$\overline{CD}$以及$\overline{AE}$，並求出x之值。

（2）若將$\overrightarrow{AD}$表示成$\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\alpha$、$\beta$之值為何？

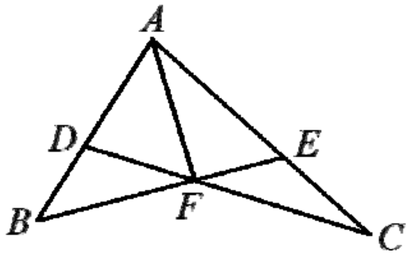
$\boxed{解}$：（1）$\overline{BD}=\overline{BF}=x$（$\because$切線段長相等）$\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=4-x$

$$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AC}+\overline{CD}=5+(4-x)=9-x$$

$$\because \overline{AE}=\overline{AF}\Rightarrow 9-x=6+x \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$$

（2）$\because \overline{DB}=\frac{3}{2},\overline{DC}=\frac{5}{2}\Rightarrow \overline{DB}:\overline{DC}=3:5 \qquad \therefore \overrightarrow{AD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

$$\therefore \alpha=\frac{5}{8},\beta=\frac{3}{8}$$



【範例二】（1）如圖，$\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$，$\overline{AE}:\overline{EC}=5:3$且$\overleftrightarrow{BE}$交$\overleftrightarrow{CD}$於$F$，若$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則序對$(x,y)=$________。

（2）設O為任意點且$\overrightarrow{OF}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$，則$(m,n,r)=$________。

$\boxed{解}$：（1）
$$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=\begin{cases}\frac{5}{2}x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AC} & (\because C,F,D\text{ 共線})\\ x\overrightarrow{AB}+\frac{8}{5}y\overrightarrow{AE} & (\because B,F,E\text{ 共線})\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}\frac{5}{2}x+y=1\\ x+\frac{8}{5}y=1\end{cases} \qquad \therefore x=\frac{1}{5}，y=\frac{1}{2}$$

（2）$\because \overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \therefore \overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

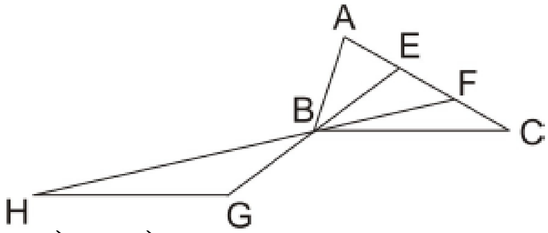
$$\therefore \overrightarrow{OF}=\frac{3}{10}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \qquad \therefore (m,n,r)=(\frac{3}{10},\frac{1}{5},\frac{1}{2})$$

【範例三】在$\triangle ABC$中，E、F為$\overline{AC}$邊上的三等分點，其中E介於F，A之間。

如下圖， 在直線$\overleftrightarrow{EB}$、$\overleftrightarrow{FB}$上分別有點G、H使得向量$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HG}$。

(1) 求$\overline{FB}:\overline{BH}$之比值。

(2) 設$\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，其中$\alpha$，$\beta$為實數，試求$\alpha$，$\beta$。

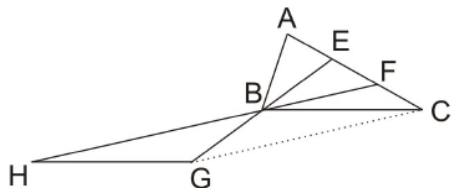


$\boxed{解}$：(1) $\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HG}$，$\therefore$四邊形$BCGH$為一平行四邊形，

故$\overrightarrow{GC}//\overrightarrow{HB}//\overrightarrow{BF}$，且$\overline{BH}=\overline{CG}$

$\therefore\triangle EGC$中，因為$\overrightarrow{BF}//\overrightarrow{GC}$，且$\overline{EF}=\overline{FC}$，

故$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{EC}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\overline{FB}}{\overline{BH}}=\dfrac{1}{2}$



(2) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{FB}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{AB}+(-\dfrac{4}{3})\overrightarrow{AC}$

【範例四】平面向量$\vec{u}$和向量$\vec{v}$互相垂直，且$\vec{u}-\vec{v}=(4,-7)$。若$\vec{u}$的長度為6，

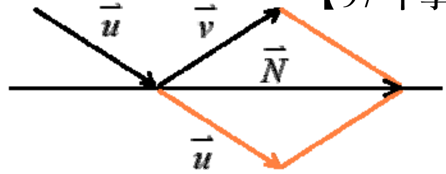
則$\vec{v}$的長度為________。　　【106年指考數乙】

$\boxed{解}$：$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\left|(4,-7)\right|^2\Rightarrow\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2=65$

$\Rightarrow 36+\left|\vec{v}\right|^2=65\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=\sqrt{29}$

【範例五】坐標平面上有一質點沿方向$\vec{u}=(1,2)$前進，現欲在此平面上置一直線L，使得此質點碰到L時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向$\vec{v}=(-2,1)$前進，則直線L的方向向量為$\vec{w}=(1,a)$時，$a=$________。

【97年學測】



$\boxed{解}$：$\vec{N}=\vec{u}+\vec{v}=(1,2)+(-2,1)=(-1,3)$

$\therefore\vec{w}=-\vec{N}=(1,-3)\ \therefore a=-3$

【範例六】已知一直線通過點$P(1,-2)$且與直線$L:x+3y+1=0$夾角為θ，且$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，則此直線方程式為________。

$\boxed{解}$：令$L':y+2=m(x-1)$　即$mx-y-m-2=0$　$\therefore L'$法向量$\overrightarrow{N_1}=(m,-1)$

$L:x+3y+1=0$法向量$\overrightarrow{N_2}=(1,3)$

$\therefore \cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}\right|$　$\therefore \dfrac{3}{5}=\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{10}}$　$\therefore 90(m^2+1)=25(m-3)^2$

$\therefore 18(m^2+1)=5(m-3)^2$　$\therefore 13m^2+30m-27=0$　$\therefore (13m-9)(m+3)=0$

$\therefore m=\dfrac{9}{13}$或$-3$　$\therefore L'$方程式為$9x-13y-35=0$或$3x+y-1=0$

（丙）向量的內積與投影

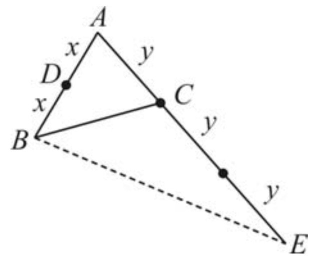
【範例一】在坐標平面上的$\triangle ABC$中，D為$\overline{AB}$的中點，且點E在射線$\overrightarrow{AC}$上，滿足$\overline{AE}=3\overline{AC}$。若向量內積$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=15$，則向量內積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=$________。

【107年指考數乙】

$\boxed{解}$：假設$\left|\overrightarrow{AD}\right|=x$、$\left|\overrightarrow{AC}\right|=y$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=y\cdot x\cdot\cos A=15$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=2x\cdot 3y\cdot\cos A=6\times 15=90$

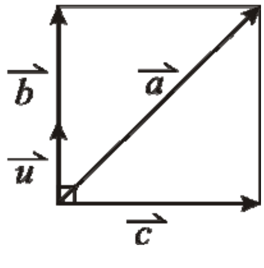


【範例二】設$\vec{a}=(3,4)$，直線$L:x-2y+4=0$，令$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，其中$\vec{b}$與直線L平行且$\vec{c}$與直線L垂直，求$\vec{b}=$________及$\vec{c}=$________。

$\boxed{解}$：$L:x-2y+4=0$方向向量$\vec{u}=(2,1)$

$\therefore \vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|^2}\vec{u}=\dfrac{10}{5}(2,1)=(4,2)$

$\therefore \vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(3,4)-(4,2)=(-1,2)$



【範例三】設 $A(2,1),B(-4,8),C$ 為坐標平面上三點，O 為原點，滿足

$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$（$a,b$ 為實數）

(1) 設 $\overrightarrow{CA}=(x,y)$，將 x 與 y 分別以 a,b 表示。

(2) 若 C 在直線 AB 上，且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{AB}$，試求 a,b 的值。

解：(1) $\overrightarrow{OA}=(2,1),\overrightarrow{OB}=(-4,8)$ $\therefore\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(2a-4b,a+8b)$

$(x,y)=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2,1)-(2a-4b,a+8b)$
$=(2-2a+4b,1-a-8b)\therefore x=2-2a+4b,y=1-a-8b$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-6,7)$，$C$ 在直線 AB 上

$\therefore\overrightarrow{CA}//\overrightarrow{AB}\Rightarrow\dfrac{2-2a+4b}{-6}=\dfrac{1-a-8b}{7}\Rightarrow a+b=1$ $\because\overrightarrow{OC}$ 垂直

$\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0\therefore-6(2a-4b)+7(a+8b)=0\Rightarrow a=16b$

$\begin{cases}a+b=1\\a=16b\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{16}{17},b=\dfrac{1}{17}$

（丁）距離公式

【範例一】坐標平面上 O 為原點，P 點坐標為 $(1,0)$，直線 L 的方程式為 $x-2y=-4$。請選出正確的選項。

(1) 在直線 L 上可以找到一點 A，滿足向量 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 平行

(2) 在直線 L 上可以找到一點 B，滿足向量 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 垂直

(3) 在直線 L 上可以找到一點 C，滿足向量 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{PC}$ 垂直

(4) 在直線 L 上可以找到一點 D，滿足 $\overline{PD}=2$

(5) 在直線 L 上可以找到一點 E，滿足 $\triangle EOP$ 為等腰三角形

【105 年指考數乙】

解：(1) 取 $A(-4,0)\therefore\overrightarrow{OP}//\overrightarrow{OA}$ (2)取 $B(0,2)\therefore\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OB}$

(3) 以 $\overline{OP}$ 為直徑之圓圓心 $K(\frac{1}{2},0)$，半徑 $\frac{1}{2}$，$d(K,L)>\frac{1}{2}$

$\therefore$ 以 $\overline{OP}$ 為直徑之圓與直線 L 不相交 $\Rightarrow\angle OCP<90^\circ$

$\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{PC}$ 夾角為銳角

(4) $\because d(P,L)=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}>2$ $\therefore D$ 點找不到

(5) 找 $\overline{OP}$ 中垂線與 L 交於 E 則 $\overline{EO}=\overline{EP}\therefore\triangle EOP$ 為等腰三角形

答：(1)(2)(5)

第十一重點：多項式

（甲）插值法

【範例一】二次函數 $y=f(x)$ 圖形過 $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,7)$ ，求 $f(4)=$________ 。

$\boxed{\text{解一}}$：$\because f(1)=1$ ， $f(2)=3$ ， $f(3)=7$ 　　可令 $f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+1$

$$\begin{cases} f(2)=3 \Rightarrow b+1=3 \quad \therefore b=2 \\ f(3)=7 \Rightarrow 2a+2b+1=7 \quad \therefore a=1 \end{cases}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)+2(x-1)+1$ 　　$\therefore f(4)=6+6+1=13$

$\boxed{\text{解二}}$： $f(x)=1\cdot\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\cdot\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+7\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$

$$=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)-3(x-1)(x-3)+\frac{7}{2}(x-1)(x-2)$$

$\therefore f(4)=1+(-9)+21=13$

【範例二】設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1)=f(2)=0$ 且 $f(3)=4$ ，則 $a+2b+c$ 的值是下列哪一個選項？

（1） 1　（2） 2　（3） 3　（4） 4　（5） 5　　【106 年指考數乙】

$\boxed{\text{解}}$： $f(x)=(x-1)(x-2)\left(x+\dfrac{c}{2}\right) \therefore f(3)=2(3+\dfrac{c}{2})=4 \Rightarrow c=-2$

$\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)=x^3-4x^2+5x-2$

$\therefore a=-4, b=5, c=-2$ 　　$\therefore a+2b+c=4$

(乙）餘式與因式定理

【範例一】若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$ ，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $x-2$ 所得的餘式為________ 。（1） 1　（2） 2　（3） 7　（4） 9　（5） 11

$\boxed{\text{解}}$： $g(x)$ 除以 $(x-2)$ 餘 $g(2)$

$\therefore g(2)=f(f(2))=f(3)=27-18-3+5=11$

【範例二】設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2+g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選出正確的選項。

（1） 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$

（2） $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$

（3） $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$

（4） $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$

（5） $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$ 　　【104 年指考數乙】

$\boxed{解}$：$f(x)=(x-1)(x-2)^2Q(x)+(x-2)^2+g(x)$，$g(x)=lx+m$

(1) $f(1)=1+g(1)$，$f(2)=g(2)$，若 $f(1),f(2)$ 已知可求得 l,m，$g(x)$ 即可求出

(2) 所求即 $f(2)=g(2)$

(3) 所求即 $f(1)=1+g(1)$

(4) $f(x)\div(x-2)^2$ 餘 $g(x)$

(5) $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+px+q$

$$\begin{cases} f(1)=1+g(x)=p+q \\ f(2)=g(2)=2p+q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+l+m=p+q \\ 2l+m=2p+q \end{cases}$$

$\therefore$ 餘 $(l-1)x+m+2=(lx+m)-x+2=g(x)-x+2$　　答：(1)(2)(4)

【範例三】已知實係數多項式 $f(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $x+1$。若 $xf(x)$ 除以 x^2+2 的餘式為 $ax+b$，則數對 $(a,b)=$________。　　【108 年指考數乙】

$\boxed{解}$：令 $f(x)=(x^2+2)\cdot Q(x)+x+1$

則 $xf(x)=x(x^2+2)\cdot Q(x)+x(x+1)=x(x^2+2)\cdot Q(x)+x^2+x$

$=x(x^2+2)\cdot Q(x)+(x^2+2)+x-2$

$=(x^2+2)\cdot[xQ(x)+1]+x-2$

故 $a=1$、$b=-2$

(丙) 方程式的根

(一) 牛頓定理：

設 $p,q\in\mathbb{Z}$ 且 $(p,q)=1$，

若 $\dfrac{q}{p}$ 是整係數方程式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 之一根，

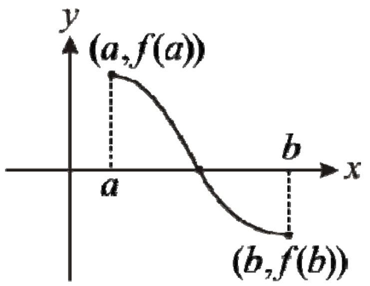
則 $p\mid a_n$，$q\mid a_0$ 且 $p-q\mid f(1)$，$p+q\mid f(-1)$。

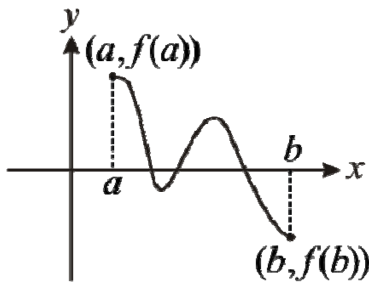
(二) 勘根定理：

設 $f(x)$ 為一實係數多項式

① 若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 至少有一實根（或奇數個實根）介於 a,b 之間。

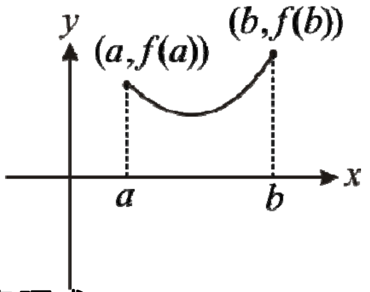
[圖形表示]

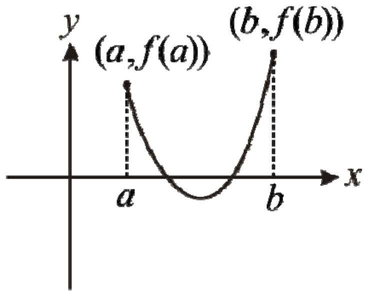




② 若 $f(a)\cdot f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間或無實根，或有偶數個實數。

[圖形表示]





(三) n 次多項式：

設 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根為 α,β,γ，則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$

【範例一】已知實係數多項式方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 的三根相同，請問 b 的值等於下列哪一個選項？

(1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 12 (5) 14 【101 年指考數乙】

解：設三根為 α,α,α $\quad\therefore\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=-8$ $\quad\therefore\alpha=-2$

$\therefore\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha=b$ $\quad b=4+4+4=12$

【範例二】設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有4個相異有理根，
則其最大根為________。 (A) 10 (B) 5 (C) 2 (D) 1 (E) -1

$\boxed{解}$：可能有理根為 $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ 又四根積 $=10$，且四根和 $=-3$

$\therefore$ 四根為 $\pm1,2,-5$ $\therefore$ 最大根為 2

【範例三】設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為1，已知
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(5)=5$，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？
(1) $(-\infty,0)$ (2) $(0,1)$ (3) $(1,2)$ (4) $(2,5)$ (5) $(5,\infty)$ 【96年學測】

$\boxed{解}$：由已知可令 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+x$

x	$-\infty$	0	1	2	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	5	∞
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

$\therefore f(x)=0$ 在 $(0,1),(2,3),(4,5)$ 存在實根

選(2)(4)

【範例四】設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。試問下列哪些敘述是正確的？
(1) $f(1-i)=0$ (2) $f(2+i)\neq0$ (3) 沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$
(4) 沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$ (5) 若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$
【93年學測】

$\boxed{解}$：(1) 實係數三次方程式 $f(x)=0$ 有一根為 $1+i$，另一虛根為 $1-i$

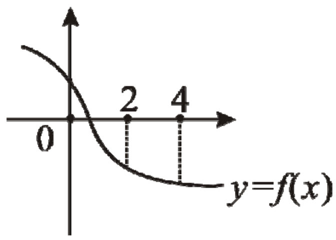
(2) $\because$ 虛根成雙 $\therefore f(2+i)\neq0$

(3) $f(x)=x$ 為三次方程式 $\therefore$ 至少有一個實根

(4) $f(x^3)=0$ 為九次方程式 $\therefore$ 至少有一個實根

(5) $\because f(x)=0$ 恰有一個實根且 $f(0)>0$，$f(2)<0$

$\therefore$ 實根在 $(0,2)$ 之間 $\therefore$ 由圖中知 $f(4)<0$



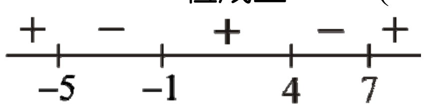
選(1)(2)(5)

【範例五】關於多項式不等式：
$x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)<(2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)$，
下列哪些選項是它的一個解？
(1) -2π (2) $-\pi$ (3) π (4) 2π 【99年指考數乙】

$\boxed{解}$：$(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)[x^2-(2x-3)]<0$

$\therefore (x+5)(x+1)(x-4)(x-7)(x^2-2x+3)<0$

$\because x^2-2x+3>0$ 恆成立 $\therefore (x+5)(x+1)(x-4)(x-7)<0$



故選(2)(4)

【範例六】實係數函數 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+ax+b$，若 $f(x)=0$ 有一根為 $2+i$，求：

(1) $a=$________，$b=$________。 (2) 滿足 $f(x)<0$ 之 x 範圍為________。

$\boxed{解}$：(1) $x=2+i \quad \therefore (x-2)^2=-1 \quad \therefore x^2-4x+5=0$

$\therefore f(x)=x^4-5x^3+3x^2+ax+b=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)$

$\therefore a=19$，$b=-30$

(2) $f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)<0$

$\therefore x^2-x-6<0 \quad \therefore (x+2)(x-3)<0 \quad \therefore -2<x<3$

第十二重點：指數與對數

（甲）圖形

【範例一】設直線 $x=k$ 與 $y=\log_5 x$、$y=\log_5(x+4)$ 分別相交，且已知兩交點的距離為 0.5，若 $k=a+\sqrt{b}$，其中 a,b 均為正整數，試問 $a+b$ 為________。

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9　(E) 10

$\boxed{解}$：兩交點分別為 $(k,\log_5 k)$ 與 $(k,\log_5(k+4))$，今知兩點距離為 0.5，

所以 $\log_5(k+4)-\log_5 k=0.5$，即 $\dfrac{k+4}{k}=\sqrt{5}$

所以 $k+4=\sqrt{5}k$，即 $k=\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=1+\sqrt{5}=a+\sqrt{b}$

所以 $a+b=1+5=6$

【範例二】設 (π,r) 為函數 $y=\log_2 x$ 圖形上之一點，其中 π 為圓周率，r 為一實數。請問下列哪些選項是正確的？

(1) (r,π) 為函數 $y=2^x$ 圖形上之一點

(2) $(-r,\pi)$ 為函數 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 圖形上之一點

(3) $\left(\dfrac{1}{\pi},r\right)$ 為函數 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形上之一點

(4) $(r,2\pi)$ 為函數 $y=4^x$ 圖形上之一點　　【100年指考數乙】

$\boxed{解}$：(1) $\because (\pi,r)$ 在 $y=\log_2 x$ 上 $\Rightarrow r=\log_2\pi \Rightarrow \pi=2^r$　　$\therefore (r,\pi)$ 在 $y=2^x$ 上

(2) $\because \pi=2^r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-r}$　　$\therefore (-r,\pi)$ 在 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 上

(3) $\because r=\log_2\pi=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\pi}$　　$\therefore \left(\dfrac{1}{\pi},r\right)$ 在 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 上

(4) $x=r$ 代入 $y=4^x \Rightarrow y=4^r=(2^r)^2=\pi^2$　　$\therefore (r,\pi^2)$ 在 $y=4^x$ 上

選(1)(2)(3)

【範例三】在坐標平面上，設 P 為 $y=2+x-x^2$ 圖形上的一點，若 P 的 x 坐標為 $\log_3 10$，則 P 點的位置在________。

(1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限 (5) 坐標軸上

$\boxed{解}$：$y=-(x^2-x-2)=-(x+1)(x-2)$

當 $x=\log_3 10$ 時 $x+1>0$, $x-2=\log_3 10-2=\log_3\dfrac{10}{9}>0$

$\therefore y<0$　$\therefore P(+,-)$ 位置在第四象限

【範例四】考慮坐標平面上滿足 $2^x=5^y$ 的點 $P(x,y)$，試問下列哪一個選項是<u>錯誤的</u>？

(1) $(0,0)$ 是一個可能的 P 點

(2) $(\log 5,\log 2)$ 是一個可能的 P 點

(3) 點 $P(x,y)$ 滿足 $xy\ge 0$

(4) 所有可能的點 $P(x,y)$ 構成的圖形為一直線

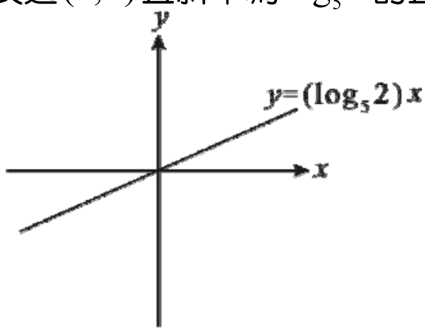
(5) 點 P 的 x,y 坐標可以同時為正整數

解：$2^x=5^y\Rightarrow \log_5 2^x=\log_5 5^y$　$\therefore y=(\log_5 2)x$ 表過 $(0,0)$ 且斜率為 $\log_5 2$ 的直線

如圖所示：故 (1)(2)(3)(4) 均正確

但若 $x,y\in\mathbb{N}\Rightarrow \log_5 2=\dfrac{y}{x}\in\mathbb{N}$（不合）

故 (5) 不正確



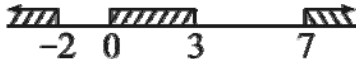
（乙）不等式

【範例一】設 $f(x)=\dfrac{(2^x-128)(3^x-1)(6^x+6)}{(5^x-125)(2^{-x}-4)}$，若 $f(a)<0$，則 a 可以是下列何數？

(1) -3　(2) 2　(3) $\sqrt{20}$　(4) $\sqrt{40}$ 。

解：$f(a)=\dfrac{(2^a-2^7)(3^a-3^0)(6^a+6)}{(5^a-5^3)(2^{-a}-2^2)}<0$ 即 $(a-7)(a-0)(a-3)(-a-2)<0$

$\therefore (a+2)\cdot a\cdot(a-3)(a-7)>0$



$\therefore$ 由所求範圍判斷(1)(2)正確

【範例二】設 $2^x=3$，$3^y=4$。試選出正確的選項。（註：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

【97 年指考數乙】

(1) $x<2$　(2) $y>\dfrac{3}{2}$　(3) $x<y$　(4) $xy=2$　(5) $x+y<2\sqrt{2}$

解：(1) $\because 3<4\Rightarrow 2^x<2^2$　$\therefore x<2$

(2) $\because 4<\sqrt{27}\Rightarrow 3^y<\sqrt{27}=3^{\frac{3}{2}}$　$\therefore y<\dfrac{3}{2}$

(3) $x=\dfrac{\log 3}{\log 2}\approx 1.585$　$y=\dfrac{\log 4}{\log 3}\approx 1.2617$　$\therefore x>y$

(4) $\because 3=2^x=(4)^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{2}{y}}\Rightarrow x=\dfrac{2}{y}$　$\therefore xy=2$

(5) $\because \dfrac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\Rightarrow x+y\ge 2\sqrt{2}$

但 $x\ne y\Rightarrow x+y>2\sqrt{2}$　　選(1)(4)

（丙）首數尾數與應用題

【範例一】觀察2的次方所形成的等比數列：$2,2^2,2^3,2^4,\cdots$，設其中出現的第一個13位數為2^n，則$n=$________。（註：$\log_{10}2\approx 0.3010$）

$\boxed{解}$：$12\le \log 2^n<13\Rightarrow \dfrac{12}{\log 2}\le n<\dfrac{13}{\log 2}\Rightarrow 39.8\sim\le n<43.18\sim$　$\therefore n$最小40

【範例二】聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特(W/m^2)來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為$I_0=10^{-12}(W/m^2)$；當測得的聲音強度為$I(W/m^2)$時，所產生的噪音分貝數d為$d(I)=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$。

（1）一隻蚊子震動翅膀測得的聲音強度為$10^{-12}(W/m^2)$，求其產生的噪音分貝數。

（2）汽車製造廠測試發現，某新車以每小時60公里速度行駛時，測得的聲音強度為$10^{-4}(W/m^2)$，試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？

（3）棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為70分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地和鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？

【93年指考數乙】

$\boxed{解}$：（1）$I=10^{-12}$　$\therefore d(I)=10\cdot\log\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}=10\cdot\log 1=0$(分貝)

（2）$I=10^{-4}$　$\therefore d(I)=10\cdot\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\log 10^8=10\cdot 8=80$(分貝)

（3）$d(I)=70=10\log\dfrac{I}{I_0}$　$\therefore 7=\log\dfrac{I}{I_0}$　$\therefore \dfrac{I}{I_0}=10^7$　$\therefore I=I_0\cdot 10^7$

所求$d(100I)=10\log\dfrac{100I}{I_0}=10\log\dfrac{100\times I_0\times 10^7}{I_0}=10\log 10^9=90$(分貝)

【範例三】設$a<b<2^{10}$，其中$\log a=3$。已知利用$\log a$、$\log 2^{10}$的值與內插法求得$\log b$的近似值為3.0025，試問b的值最接近下列哪一個選項？

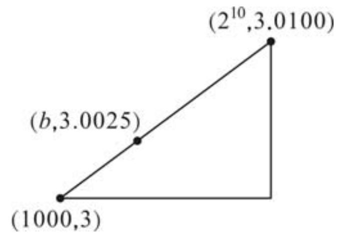
（註：$\log 2\approx 0.3010$）　【97年指考數乙】

（1）1002　（2）1006　（3）1010　（4）1014　（5）1018

$\boxed{解}$：$\log a=3\Rightarrow a=1000$

由內插法可知

$\dfrac{b-1000}{25-0}=\dfrac{1024-1000}{100-0}\Rightarrow b=1006$



第十三重點：數與數線上的幾何

【範例一】三個相異實數a,b,c滿足$b=\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}c$，如果將$a,b,c$標示在數線上，則

(1) b在a與c之間　(2) $c>b$　(3) 若$d=\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}c$，則$d$在$a$與$b$之間

(4) a到c的距離是a到b的距離的5倍

(5) 如果$|b|=\frac{4}{5}|a|+\frac{1}{5}|c|$，則$a\cdot b\cdot c>0$

$\boxed{解}$：① 若$a<c$或$a>c$均有可能，故(1)真(2)不真(4)真

② $d=\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}c=\frac{4}{3}a-\frac{1}{3}(5b-4a)=\frac{8}{3}a-\frac{5}{3}b$

$\therefore d$為a,b之外分點　$\therefore$(3)不真

③ 由(1)當$a<0,b<0,c<0$，$-b=-\frac{4}{5}a-\frac{1}{5}c\Rightarrow b=\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}c$

但$a,b,c<0$，故(5)不真　選(1)(4)

【範例二】設a,b,c,d為實數且$\begin{cases}|\ ax+1\ |\le b\\ |\ cx+1\ |\ge d\end{cases}$的解為$-\frac{9}{2}\le x\le 1$或$3\le x\le\frac{7}{2}$，

則$a+b+c+d=$________。

$\boxed{解}$：$\because -\frac{9}{2}\le x\le\frac{7}{2}\Rightarrow -4\le x+\frac{1}{2}\le 4\Rightarrow\left|\ x+\frac{1}{2}\ \right|\le 4\Rightarrow|\ 2x+1\ |\le 8$

$\because x\le 1$或$x\ge 3\Rightarrow$

$\because x-2\le -1$或$x-2\ge 1\Rightarrow\Rightarrow|\ x-2\ |\ge 1\Rightarrow\left|\ -\frac{1}{2}x+1\ \right|\le\frac{1}{2}$

$\therefore a+b+c+d=2+8-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=10$

【範例三】設x為實數，請求出滿足方程式$|\ x+1\ |+|\ 2x-3\ |=10$的解$x=$________。

$\boxed{解}$：① $x\ge\frac{3}{2}$時，$(x+1)+(2x-3)=10$，$\therefore x=4$

② $-1\le x<\frac{3}{2}$時，$(x+1)-(2x-3)=10$，$\therefore x=-6$（不合）

③ $x<-1$時，$-(x+1)-(2x-3)=10$，$\therefore x=-\frac{8}{3}$

由①②③得$x=4$或$-\frac{8}{3}$

【範例四】考慮有理數$\dfrac{n}{m}$，其中m,n為正整數且$1\le mn\le 8$。則這樣的數值(例如$\dfrac{1}{2}$與$\dfrac{2}{4}$同值，只算1個)共幾個？

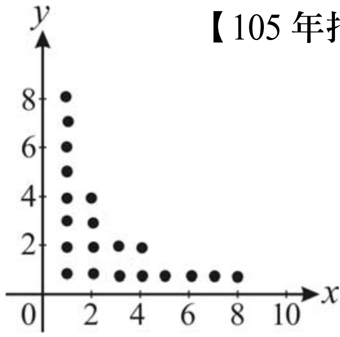
(1) 14個　(2) 15個　(3) 16個　(4) 17個　(5) 18個

【105年指考數乙】

解：點(m,n)如右圖

$\dfrac{n}{m}=\dfrac{n-0}{m-0}$表$(0,0)$與$(m,n)$之斜率

觀察可得共$20-3=17$



答：(4)

第十四重點：排列組合與古典機率

【範例一】某畢業班由8位同學負責畢旅規劃，分成A,B,C三組，且三組分別由3人、3人、2　人組成。8位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這8位同學總共有幾種分組方式？

(1) 140種　(2) 150種　(3) 160種　(4) 170種　(5) 180種

【109年指考數乙】

解：$\underbrace{C_1^6\times C_3^5\times 2}_{\text{甲乙在}A\text{或}B\text{組}}+\underbrace{C_3^6\times C_3^3}_{\text{甲乙在}C\text{組}}=120+20=140$

【範例二】從三位數中任選一數，寫成$a\times 10^2+b\times 10+c$，其中$a$是1到9的整數，$b$和$c$都是0到9的整數，則$a+b+c=9$的機率為________。

【108年指考數乙】

解：$p=\dfrac{H_8^3}{9\times 10\times 10}=\dfrac{C_2^{10}}{9\times 10\times 10}=\dfrac{1}{20}$

【範例三】不等式$x+y\le 47$的所有非負整數解中，滿足$x\ge y$的解共有________組。

【108年指考數乙】

解：$H_{47}^3=C_2^{49}=1176$且$x=y$之解有$(0,0)\sim(23,23)$共24組解，

根據二一律，$n(x>y)=n(x<y)=\dfrac{1176-24}{2}=576$，

故$x\ge y$之解有$576+24=600$

【範例四】某甲在坐標平面上點$(3,4)$的位置，擲一均勻銅板，若出現正面，則以向量$(1,-1)$的方向與大小移動；若出現反面，則以向量$(-1,-1)$的方向與大小移動。到達新位置之後，重複同樣的步驟，直到抵達x軸或y軸時停止。試選出正確的選項。

(1) 甲可能到達點$(0,0)$　(2) 若甲停在y軸，則甲恰好移動4次

(3) 甲最後停在y軸的機率大於停在x軸的機率

(4) 甲最後停在點$(2,0)$的機率為0

(5) 甲最後停在點$(1,0)$與停在點$(5,0)$的機率相等　【109年指考數乙(補)】

解：(1) 甲可能到達點$(0,1),(1,0),(3,0),(5,0),(7,0)$

(2) 若甲停在y軸，則甲恰好移動3次

(3) 甲最後停在y軸的機率為$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$小於停在$x$軸的機率$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

(5) 甲最後停在點$(1,0)$的機率$(C_2^3(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2})\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

小於停在點$(5,0)$的機率$C_3^4(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2}=\frac{4}{16}$　選(4)

【範例五】某公司生產的光電元件，每50件為一批，每批中至多有5件不合格品。

某甲向該公司訂購光電元件，假設甲的檢驗程序如下：

在交貨的每一批50件光電元件中，隨意抽取2件檢驗。若2件均合格，則整批均接受；否則整批退貨。

(1) 該公司交給甲的某一批貨被退件的機率最大可能值為何？

(2) 若該公司希望將交給甲的退貨的機率控制在10%以內，則其生產線上每批50件的產品中，不合格品最多允許幾件？

$\boxed{解}$：(1) $p=1-\dfrac{C_2^{45}}{C_2^{50}}=\dfrac{47}{245}$

(2) $p=1-\dfrac{C_2^{50-k}}{C_2^{50}}<0.1 \Rightarrow \dfrac{C_2^{50-k}}{C_2^{50}}>0.9$　　$\therefore \dfrac{(50-k)(50-k-1)}{50\cdot 49}>\dfrac{9}{10}$

$\therefore (50-k)(50-k-1)>45\cdot 49$　直接代$k=0,1,2,3,4,5$檢查得$k\le 2$

所以應控制至多2個不合格