【大學入學考試指定考科數甲(選修)觀念統整】

第一重點：圖形的探討

(甲)曲線的切線

曲線 $y=f(x)$ 過切點 $(a,f(a))$ 之切線為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$。

【範例一】拋物線 $\Gamma: y=P(x)$ 的對稱軸平行於 y 軸，且 Γ 與 x 軸交於點 $(2,0)$，並在 $x=1$ 時與函數 $y=x^4+1$ 的圖形相切，求 $P(x)$。 【82 年日大】

解：令 $\Gamma: y=(ax+b)(x-2)=ax^2+(b-2a)x-2b$

$\because \Gamma$ 與 $y=x^4+1$ 切於 $(1,2)$ $\quad \therefore 2=-a-b \quad \therefore a+b=-2$

又兩曲線在 $x=1$ 相切 $\quad \therefore y'_{x=1}=y'_{x=1}$

$\therefore \left[2ax+(b-2a)=4x^3\right]_{x=1} \quad \therefore b=4 \quad \therefore a=-6$

$\therefore y=(-6x+4)(x-2)=-6x^2+16x-8$

【範例二】試求在 $y=x^3+4x^2+5x-1$ 的圖形上，以那些點為切點，所作之切線可通過點 $(1,0)$。

解：設切點為 $(h,f(h))=(h,h^3+4h^2+5h-1)$

$\therefore f'(h)=3h^2+8h+5=\dfrac{f(h)-0}{h-1} \quad \therefore h=2,-2,-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 切點為 $(2,33)$，$(-2,-3)$，$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{21}{8})$

【範例三】設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。

(1) $f(1)=g(1)$ (2) $f'(1)=g'(1)$ (3) $f''(1)=0$

(4) 存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$

(5) 存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$ 【106 年指考數甲】

解：(1)(2) 因為在 $x=1$ 相切 $\Rightarrow f(1)=g(1)$，$f'(1)=g'(1)$

(3) $\because$ 兩圖形只有一個交點 $\therefore (1,f(1))$ 為反曲點 $\therefore f''(1)=0$

(4)(5) 只有 $a=1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$，$f''(a)=g''(a)=0$ 選(1)(2)(3)

(乙)多項式函數圖形的探討

【範例一】已知函數 $y=x^3+2x+3\ (x\in R)$ 的圖形，則下列何者正確？

(1) 圖形有最高點也有最低點　(2)圖形有水平切線

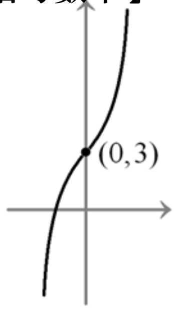
(3) 圖形與任一水平直線恰交於一點

(4) 若 (a,b) 在圖形上，則 $(-a,-b+6)$ 也在圖形上

(5) 圖形與三直線 $y=0$, $x=0$, $x=1$ 所圍成的區域面積大於 4

【96 年指考數甲】

解：$y'=3x^2+2>0$ 恆成立　$\therefore$ 函數圖形絕對遞增



$y''=6x=0$　$\therefore x=0$ 反曲點為 $(0,3)$　$\therefore$ 圖形如右

(1)(2) 不正確，(3) 正確

(4) 反曲點 $(0,3)$ 亦為圖形對稱點

$\therefore (a,b)$ 在圖形上則 $(-a,-b+6)$ 亦在圖形上

(5) 所求面積 $=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 (x^3+2x+3)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4+x^2+3x\right)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{4}+1+3=4+\frac{1}{4}>4$

$\therefore$(3)(4)(5)正確

【範例二】設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，已知 $y=f'(x)$ 的圖形是一個通過點 $(1,0)$ 和點 $(2,0)$ 且開口向上的拋物線。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(x)$ 一定是三次多項式

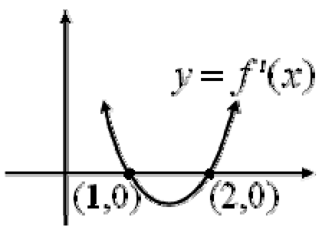
(2) $f(x)$ 在 $1<x<2$ 的範圍內必為遞增

(3) $f(x)$ 一定恰有兩個極值

(4) $f(x)=0$ 一定有三個實根

(5) $f(x)=0$ 在 $1\le x\le 2$ 範圍內一定有實根　【97 年指考數甲】

解：由已知可令 $y=f'(x)=k(x-1)(x-2)$，$k>0$



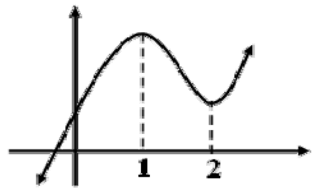
(1) $f(x)$ 為三次多項式

(2) $1<x<2$ 時，$f'(x)<0$　$\therefore f(x)\downarrow$

(3) $\begin{cases} f'(1^-)>0,\ f'(1^+)<0 & \therefore f(1)\text{為極大} \\ f'(2^-)<0,\ f'(2^+)>0 & \therefore f(2)\text{為極小} \end{cases}$

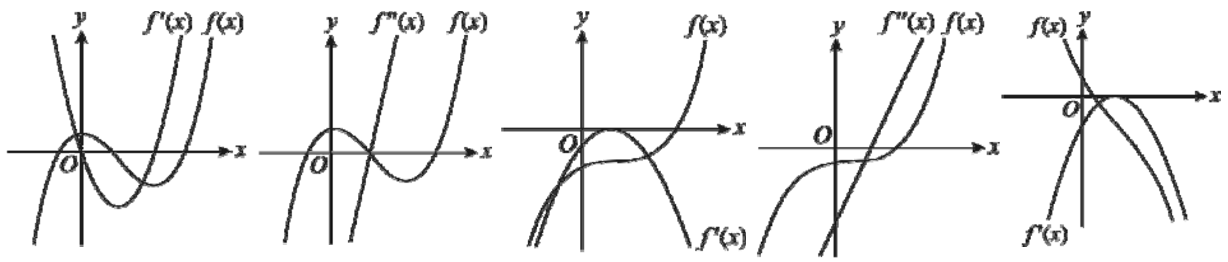
(4) $f(x)$ 可能一實根兩虛根(此時 $f(1)$ 與 $f(2)$ 同號)

(5) $y=f(x)$圖形可能為：



【範例三】下列圖形中，關於三次多項式函數 $f\left(x\right)$與其一階導函數 $f'\left(x\right)$、二階導函數 $f''\left(x\right)$的相對位置，何者是合理的？

(1) (2) (3) (4) (5)

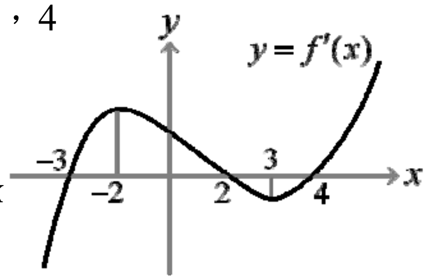


解：當 $f\left(x\right)$在 $x=c$ 處是遞增的，則 $f'\left(c\right)>0 \Rightarrow$ 選項(3)不合

當 $f\left(x\right)$在 $x=c$ 處是遞減的，則 $f'\left(c\right)<0 \Rightarrow$ 選項(5)不合

當 $f\left(x\right)$在 $x=c$ 處是凹口朝上的，則 $f''\left(c\right)>0 \Rightarrow$ 選項(4)不合

【範例四】已知實係數多項函數 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ 之第一導函數 $y=f'(x)$ 的圖形如右圖所示，其中 -3，2，4 為該圖形與 x 軸之交點的橫坐標。



(1) $f(x)$ 之係數中，那些恆為正數？

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) k

(2) 下列的敘述何者正確？

(A) $f(4)$是極小值 (B) $f(2)$是極大值 (C) $f(-3)$是極大值

(D) $f(3)$是極小值 (E) $f(-2)$是極大值。

(3) 在下列那些區間，函數 $y=f(x)$ 之圖形的凹口向上？

(A) $(-3,-2)$ (B) $(-2,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(3,4)$ (E) $(-2,3)$。

解：(1) $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$

$\therefore d>0, c<0, a>0, -\dfrac{3b}{4a}>0 \therefore b<0$ $\therefore$選(A)(D)

(2) (A)(B)

(3) $f(x)$ 凹口向上，則 $f''(x)>0$ $\therefore f'(x)\nearrow \therefore x<-2$ 或 $x>3$

$\therefore$選(A)(D)

【範例五】已知一個n次實係數多項式$f(x)$滿足下列性質：

當$x<0$時，$f'(x)<0$且$f''(x)>0$；

當$0<x<1$時，$f'(x)<0$且$f''(x)<0$；

當$1<x<4$時，$f'(x)<0$且$f''(x)>0$；

當$x>4$時，$f'(x)>0$且$f''(x)>0$，

請選出正確的選項

(1) $f'(2)>f'(3)$　(2) $f(x)$在$x=4$時有最小值

(3) $f(x)$的圖形只有一個反曲點　(4) n可能為3

(5) $f(x)$的最高次項係數必為正　【101年指考數甲】

$\boxed{解}$：因為$f(x)$是多項式函數，所以依題意，可將$f(x)$的相關資料整理如下：

x		0		1		4	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$

(1) 當$1<x<4$時，$f''(x)>0$，即$f'(x)$是嚴格遞增函數，得知$f'(2)<f'(3)$

(2) 由上表得知$f(4)$是最小值

(3) 點$(0,f(0))$與$(1,f(1))$都是$f(x)$圖形的反曲點

(4) 因為圖形的反曲點不只有一個，所以$f(x)$不是三次多項式函數，即$n\neq 3$

(5) 因為圖形的右上方是上揚的，所以最高次項係數為正

故選(2)(5)

(丙)多項式方程式的根

【範例一】設$f(x)=2x^3-3x^2-12x+k$

(1) 若$f(x)=0$有三相異實根，則k範圍為________。

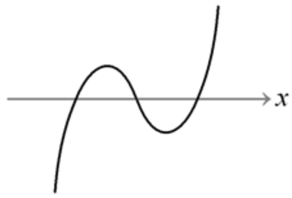
(2) 若$f(x)=0$有二重根，則k範圍為________。

(3) 若$f(x)=0$有一實根二虛根，則k範圍為________。

$\boxed{解}$：$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2,-1$

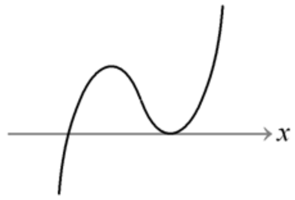
又 $f''(x)=12x-6 \quad \Rightarrow \begin{cases} f''(-1)<0 \Rightarrow f(-1)=k+7 \quad (極大) \\ f''(2)>0 \Rightarrow f(2)=k-20(極小) \end{cases}$

(1)

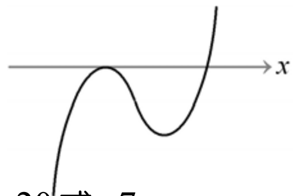


$\Rightarrow f(-1)f(2)<0 \quad \Rightarrow -7<k<20$

(2)

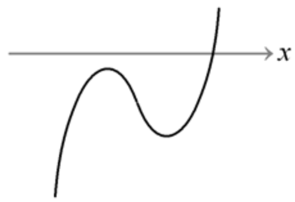


或



$\Rightarrow f(-1)\cdot f(2)=0 \quad \Rightarrow k=20$ 或 -7

(3)



或

$\Rightarrow f(-1)\cdot f(2)>0 \quad \Rightarrow k>20$ 或 $k<-7$

【範例二】考慮多項式函數 $f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$，試問以下哪些選項是正確的？

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{f(k+100)}=0$（$k$ 為正整數） (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

(3) 函數 f 在區間$[\frac{1}{2},1]$遞增 (4) 若 $x\geq 0$，則 $f(x)\geq 0$

(5) 在坐標平面上 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=3$ 恰有兩個交點

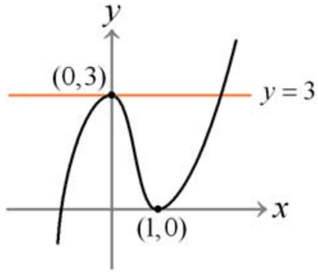
【95年指考數甲】

$\boxed{解}$：$f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3 \quad \Rightarrow f'(x)=5x^4+8x^3-3x^2-10x$

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{f(k+100)}=1$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$

(3)(4)(5) $f'(x)=x(x-1)(5x^2+13x+10)=0 \qquad \therefore x=0,1$

x		0		1	
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



$\therefore$ 選(2)(4)(5)

【範例三】設$m\in\mathbb{R}$，四次方程式$3x^4-4mx^3+1=0$無實根，則m範圍為________。　【91年指考數甲】

$\boxed{解}$：令$f(x)=3x^4-4mx^3+1$

$\Rightarrow\ f'(x)=12x^3-12mx^2=12x^2(x-m)$

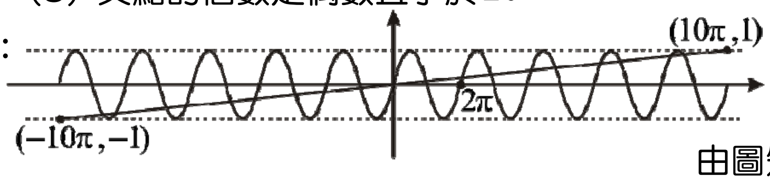
$\because\ f'(m^-)<0,\ f'(m^+)>0\quad\therefore\ f(m)$為極小，由已知得$f(m)>0$

$\therefore -mx^4+1>0\quad\therefore m^4-1<0\quad\therefore m^2-1<0\quad\therefore -1<m<1$

(丁)三角函數的圖形與週期

【範例一】關於坐標平面上函數$y=\sin x$的圖形和$y=\dfrac{x}{10\pi}$的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？

(1) 交點的個數是無窮多
(2) 交點的個數是奇數且大於20
(3) 交點的個數是奇數且小於20
(4) 交點的個數是偶數且大於或等於20
(5) 交點的個數是偶數且小於20　【96年學測】

$\boxed{解}$：


由圖知，有19個交點

【範例二】方程式$\cos x=-\dfrac{1}{3}$(1) 在$0\le x\le 2\pi$的範圍內有________個實根，(2) 這些實根的總和為________。

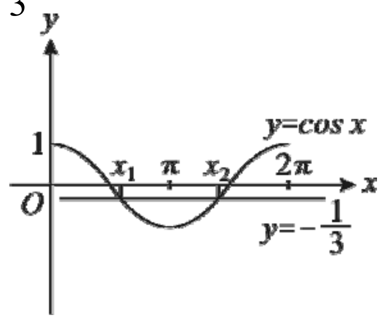
$\boxed{解}$：在同一坐標平面上，繪製$y=\cos x$與$y=-\dfrac{1}{3}$的圖形如下

$\because$在$0\le x\le 2\pi$的範圍內，

二方程式圖形有2個交點

$\therefore$方程式$\cos x=-\dfrac{1}{3}$有2個實根

又直線$x=\pi$為圖形的對稱軸



$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}=\pi \Rightarrow x_1+x_2=2\pi$　即二實根的總和為2π

【範例三】試問在$0\le x\le 2\pi$的範圍中，$y=3\sin x$的函數圖形與$y=2\sin 2x$的函數圖形有幾個交點？

(1) 2 個交點　(2) 3 個交點　(3) 4 個交點　(4) 5 個交點

(5) 6 個交點　　【106 年指考數甲】

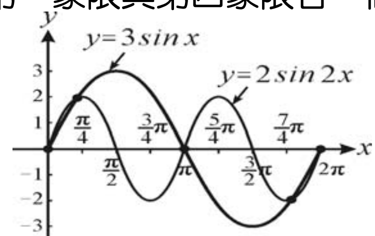
$\boxed{\text{解}}$：令$3\sin x-2\sin 2x=0\Rightarrow 3\sin x-4\sin x\cos x=0$

$\Rightarrow \sin x\left(3-4\cos x\right)=0\Rightarrow \sin x=0$或$3-4\cos x=0$

若$\sin x=0$，$x=0$或π或2π，

若$3-4\cos x=0$，$\cos x=\dfrac{3}{4}$，在第一象限與第四象限各一個解

共有5個解，所以有5個交點



【範例四】關於函數$y=f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$的圖形，下列敘述哪些是正確的？

(A) $y=f(x)$的週期為π　　(B) $y=f(x)$的振幅為$\sqrt{2}$

(C) $y=f(x)$的圖形與y軸的交點為$(0，\dfrac{1}{2})$

(D) $y=f(x)$的圖形與x軸有無限多個交點

(E) $y=f(x)$的圖形對稱於原點。

$\boxed{\text{解}}$：$\because y=f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

(A) y的週期為2π　　(B) y的振幅為$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) 當$x=0$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$圖形和$y$軸交於點$(0，\dfrac{1}{2})$

(D) 正弦函數的圖形和x軸有無限多個交點。

(E) $y=\sin x$的圖形對稱於原點

$\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$的圖形不會對稱於原點　選(C)(D)

【範例五】考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，其中 x 屬於任意實數。請選出正確的選項。

(1) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立　(2) f 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) f 的最小值為 0 (4) $f\left(\dfrac{\pi}{10}\right)>f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

(5) 函數 f 的最小正週期為 π　【102 年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) $f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|=|-\sin x|+|\cos x|$
$=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$

(2)(3)(4)(5) $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$
$=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ 週期為 $\dfrac{\pi}{2}$，故 $f(x)$ 的值只須考慮 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$

此時 $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

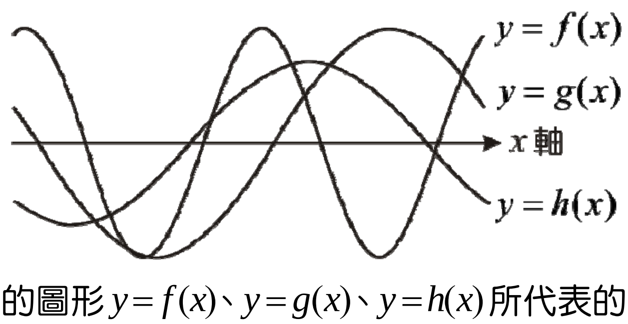
$\because \dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$

$\therefore 1\le\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Rightarrow f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{2}$，最小值為 1

$f\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

($\because \theta\in\mathrm{I}$ 時 $\sin\theta\nearrow$)　選(1)(2)

【範例六】將函數 $y=3\sin x-\cos x$、$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$ 所代表的函數應如何配置？

$\boxed{解}$：$y=3\sin x-\cos x\Rightarrow$ 週期 2π，振幅 $\sqrt{10}$，故為圖中 $y=g(x)$

$y=\sin(2x)+3\cos(2x)\Rightarrow$ 週期 π，振幅 $\sqrt{10}$，故為圖中 $y=f(x)$

$y=2\sin x+2\cos x\Rightarrow$ 週期 2π，振幅 $\sqrt{8}$，為圖中 $y=h(x)$

【範例七】下列哪些方程式有實數解？

(1) $x^3+x-1=0$　(2) $2^x+2^{-x}=0$　(3) $\log_2 x+\log_x 2=1$

(4) $\sin x+\cos 2x=3$　(5) $4\sin x+3\cos x=\dfrac{9}{2}$　【99年學測】

$\boxed{解}$：(1) 實係數奇數次方程式必有實根(∵虛根成雙)

(2) $2^x+2^x>0$ 恆成立

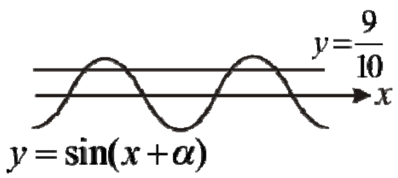
(3) 令 $t=\log_2 x\Rightarrow t+\dfrac{1}{t}=1\quad\therefore t^2-t+1=0$ 無實根

(4) 令 $t=\sin x\Rightarrow t+1-2t^2=3\quad\therefore 2t^2-t+2=0$ 無實根

(5) $5(\dfrac{4}{5}\sin x+\dfrac{3}{5}\cos x)=\dfrac{9}{2}\quad\therefore \sin(x+\alpha)=\dfrac{9}{10}$

(其中 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$)

取 $\begin{cases} y=\sin(x+\alpha) \\ y=\dfrac{9}{10} \end{cases}$



選(1)(5)

(戊) 點與圖形的旋轉鏡射伸縮與推移

(A) 旋轉矩陣

(1) 若 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，則 $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，則 $B^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

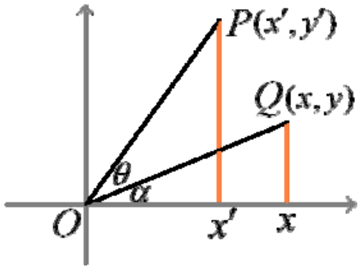
(3) 點 (x,y) 以原點為中心旋轉有向角 θ 得點 (x',y')，

則 $\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$

(4) 複數的旋轉

已知 $\overline{OP}=\overline{OQ}$ 且 $\angle POQ=\theta$，$P(x',y')$，$Q(x,y)$，

則 $x'+y'i=(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)$



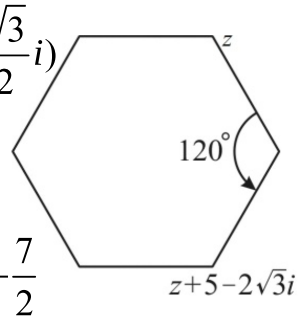
(5) 點 $A(x,y)$ 對直線 $L: y=(\tan\dfrac{\theta}{2})x$ 之鏡射點為 $B(x',y')$，

則 $\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$

(6) 伸縮矩陣：$\begin{bmatrix}h & 0 \\ 0 & k\end{bmatrix}$，$h,k>0$

(7) 推移矩陣：$\begin{cases}\text{以}x\text{軸為不變線}:\begin{bmatrix}1 & k \\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ \text{以}y\text{軸為不變線}:\begin{bmatrix}1 & 0 \\ k & 1\end{bmatrix}\end{cases}$

【範例一】設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 $z,0,z+5-2\sqrt{3}i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），則 z 的實部為________。（化成最簡分數）　　【108 年指考數甲】



$\boxed{解}$：$z+5-2\sqrt{3}i=z(\cos120^{\circ}+i\sin120^{\circ})=z(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

$$\therefore 5-2\sqrt{3}i=z(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$\Rightarrow z=\frac{5-2\sqrt{3}i}{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i \qquad z\text{ 的實部為}-\frac{7}{2}$$

【範例二】設複數平面上的相異四點 z_1,z_2,z_3,z_4 依序且依逆時針方向可連成一個正方形。下列哪一個選項為 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ 之值？

(1) $\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{2}\,i\sin(\dfrac{\pi}{4})$　(2) $\sqrt{2}\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{2}\,i\sin(-\dfrac{\pi}{4})$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\sin(\dfrac{\pi}{4})$　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\sin(-\dfrac{\pi}{4})$

(5) $\cos(\dfrac{\pi}{4})+i\sin(\dfrac{\pi}{4})$

$\boxed{解}$：$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\sin(-\dfrac{\pi}{4})$

【範例三】A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是對直線 $L:y+\sqrt{3}x=0$ 的鏡射，且知 $AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。請選出正確的選項。

(說明：A 將 P 點對應到 Q 點，則 L 為線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線)

(1) $AB=BA$　(2) $A+B=0$

(3) B 所對應的平面變換是旋轉　(4) $-A$ 是 B 的(乘法)反方陣

【92 年指考數甲】

$\boxed{解}$：$L: y=-\sqrt{3}x \quad \therefore \tan\frac{\theta}{2}=-\sqrt{3}=\tan 120^\circ \Rightarrow \theta=240^\circ$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}\cos 240^\circ & \sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & -\cos 240^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

$$\therefore B=A^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=-A$$

$$BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}=AB$$

$A+B=A+(-A)=0$

$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$為一鏡射

$(-A)\cdot B=(-A)(-A)=A^2=I \;\therefore -A$為$B$之乘法反元素，選(1)(2)

【範例四】若$\Gamma=\{z|\,z$為複數且$|z-1|=1\}$，則下列哪些點會落在圖形

$\Omega=\{w\,|\,w=iz, z\in\Gamma\}$上？

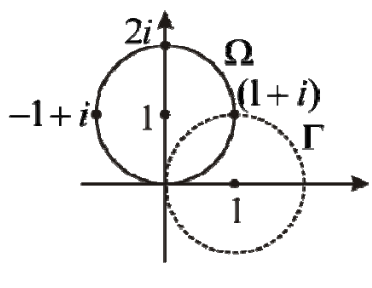
(1) $2i$　(2) $-2i$　(3) $1+i$　(4) $1-i$　(5) $-1+i$

$\boxed{解}$：Γ為圓，圓心$(1,0)$，半徑1

Ω為Γ沿原點轉90°的圓

$(\because w=z(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ))$

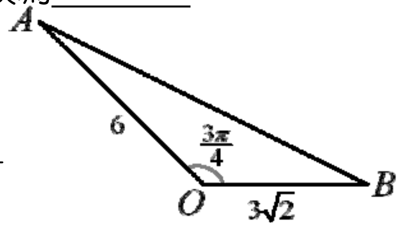
故選(1)(3)(5)



【範例五】$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，複數平面上$\triangle AOB$中，$A(\alpha)$、$B(\beta)$、$O$表原點，

若$|\alpha|=6$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=-1+i$，

求(1) $\angle AOB=$________。 (2) $\triangle AOB$面積為________。



$\boxed{\text{解}}$：(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}=-1+i=\sqrt{2}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)$

$=\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})$ $\therefore\angle AOB=\dfrac{3\pi}{4}$

(2) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\therefore|\alpha|=\sqrt{2}|\beta|$ $\therefore 6=\sqrt{2}|\beta|$

$\therefore|\beta|=3\sqrt{2}$ $\therefore\triangle AOB$面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}=9$

【範例六】對於正整數n，設$(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中$i=\sqrt{-1}$且a_n、b_n為實數。

(1) 試求$a_4^{\ 2}+b_4^{\ 2}$之值。

(2) 從恆等式$(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$可推得a_n、b_n會滿足矩陣乘法

$\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，試求矩陣$T$。

(3) 令P、Q為坐標平面上異於原點O的兩點，若矩陣T在平面上定義的線性變換將P、Q分別映射到點P'、Q'，

試證$\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$且$\angle POQ=\angle P'OQ'$。

$\boxed{\text{解}}$：(1) $\because(1+i)^4=a_4+b_4i$，$-4+0i=a_4+b_4i$ $\therefore a_4^{\ 2}+b_4^{\ 2}=(-4)^2+0^2=16$

(2) $\because(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$

$a_{n+1}+b_{n+1}i=(a_n+b_ni)(1+i)=(a_n-b_n)+(a_n-b_n)i$

$\therefore\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n-b_n\\a_n+b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$ $\therefore T=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

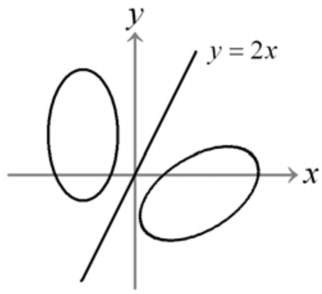
(3) 證：$T=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos45^\circ&-\sin45^\circ\\\sin45^\circ&\cos45^\circ\end{bmatrix}$

為旋轉與伸縮變換之合成

$\therefore P'$為P以圓點為中心旋轉45°在伸縮$\sqrt{2}$倍 $\therefore\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\sqrt{2}$，

同理$\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\sqrt{2}$且$\angle POQ=\angle P'OQ'$

【範例七】如圖，在直角坐標平面上，直線 $y=2x$ 為兩個圖形的對稱軸，亦即對圖形上每一個坐標 $(x\,,\,y)$，存在一個矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 使得 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$________。

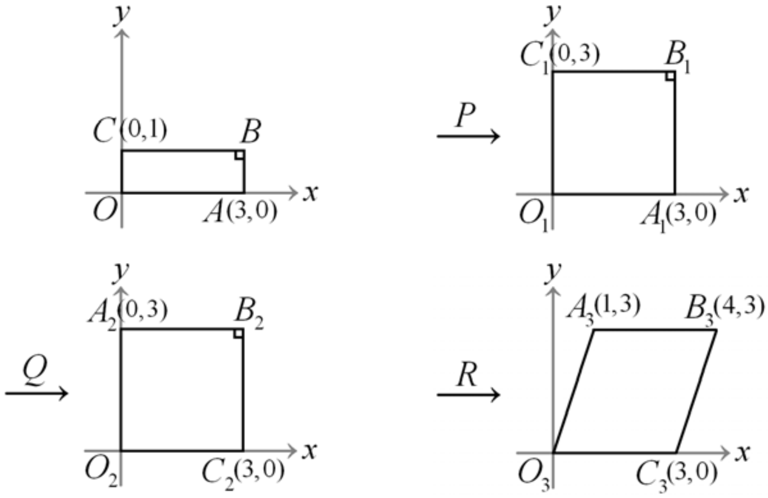


$\boxed{解}$：對稱軸 $y=\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot x$　故 $\tan\dfrac{\theta}{2}=2$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{2\cdot 2}{1+2^2}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{1-2^2}{1+2^2}=-\dfrac{3}{5}$

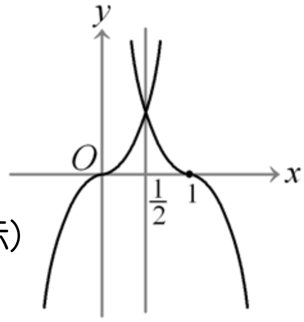
$\therefore$ 鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{bmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore a+b+c+d=8$

【範例八】如圖 P,Q,R 表三個變換，設 S 表 P,Q,R 三個變換之合成，則 $S=$___



$\boxed{解}$：$S=R\cdot Q\cdot P=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

【範例九】多項式函數$g(x)$的圖形與$f(x)=5x^3$的圖形左右互相對稱於直線$x=\dfrac{1}{2}$，如右圖所示。



(1) 若$P=(a,5a^3)$在$f(x)=5x^3$的圖形上，則在$g(x)$的圖形上，P的對稱點為________。(以a表示)

(2) $g(x)$=________ 。

$\boxed{解}$：$(x,y)\xrightarrow[\text{對稱點}]{x=h}(2h-x,y)$ $\therefore (x,y)\xrightarrow[\text{對稱點}]{x=\frac{1}{2}}(1-x,y)$

$\therefore P(a,5a^3)$對$x=\dfrac{1}{2}$之對稱點為$(1-a,5a^3)$且$g(x)=5(1-x)^3$

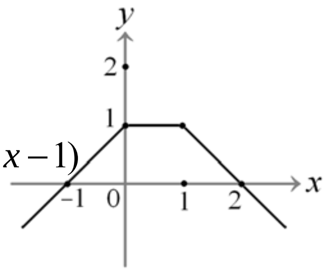
【範例十】設$f(x)=-\dfrac{1}{2}|x|-\dfrac{1}{2}|x-1|+\dfrac{3}{2}$，則

(1) 圖(一)為下列哪一個函數之圖形？

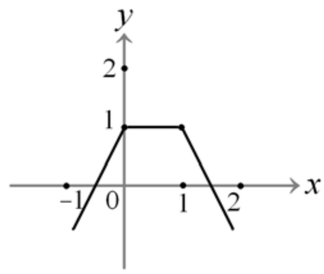
(A) $f(-x)$ (B) $-f(x)$ (C) $f(1-x)$ (D) $f(x-1)$

(2)圖(二)為下列哪一個函數之圖形？

(A) $f(x)$ (B) $f(\dfrac{x}{2})$ (C) $f(-\dfrac{x}{2})$ (D) $f(2x)$



(圖一)



(圖二)

$\boxed{解}$：圖(一)即函數$f(x)$之圖形，又本身對稱$x=\dfrac{1}{2}$

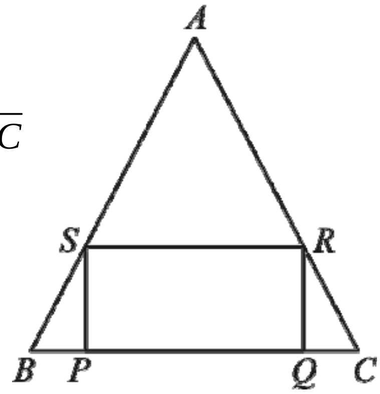
$\therefore f(1-x)=f(x)$ $\therefore$(1)選(C)

又圖(二)為圖(一)將x坐標伸縮$\dfrac{1}{2}$倍

$\therefore$圖(二)為函數$f(2x)$之圖形 $\therefore$(2)選(D)

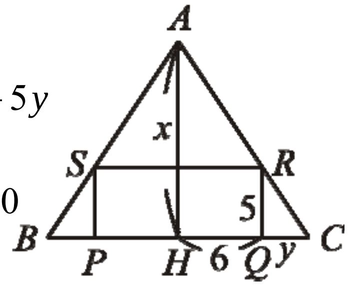
第二重點：應用題中的極值探討

(甲)算幾不等式



【範例一】如圖所示，$PQRS$ 為一給定的矩形，長$\overline{PQ}=12$、寬$\overline{QR}=5$，而△ABC 為等腰三角形，其中$\overline{AB}=\overline{AC}$，$P$、$Q$ 在$\overline{BC}$ 邊上，R、S 分別在$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 邊上，則當△ABC 中$\overline{BC}$ 邊上的高為________時，△ABC 的面積為最小。　【100 年指考數甲】

解：令$\overline{BC}$ 邊上高$\overline{AH}=x$、$\overline{QC}=y$　$\therefore \dfrac{x}{6+y}=\dfrac{5}{y}$



$\therefore xy=30+5y$　　$\therefore y=\dfrac{30}{x-5}\ (x-5>0)$

$\therefore$△ABC 面積$=\dfrac{1}{2}(12+2y)\cdot x=6x+xy=6x+30+5y$

$$=6x+30+5\cdot\frac{30}{x-5}=6(x-5)+\frac{150}{x-5}+60$$

$$\geq 2\sqrt{6(x-5)\cdot\frac{150}{x-5}}+60=120$$

此時$6(x-5)=\dfrac{150}{x-5}$　$\therefore (x-5)^2=25$　$\therefore x=10$

【範例二】設 a、b、c 分別為函數 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$、$g(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$、

$h(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{2}{x^2}}$ 在 x 為任意正實數時的最小值。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $b=a^2$　　(2) $c=2^{\frac{3}{4}}$

(3) $f(x)+g(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $a+b$

(4) $g(x)+h(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $b+c$

$\boxed{解}$：$f(x)=x+\dfrac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}=2\sqrt{2}\Rightarrow$“$=$”成立時，$x=\dfrac{2}{x}\Rightarrow x=\sqrt{2}$

$g(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{2}{x^2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow$“$=$”成立時，

$x^2=\dfrac{2}{x^2}\Rightarrow x=\sqrt[4]{2}$

$h(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{2}{x^2}}\geq\sqrt{2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{2}{x^2}}}=\sqrt[4]{8}=2^{\frac{3}{4}}\Rightarrow$“$=$”成立時，

$x^2=\dfrac{2}{x^2}\Rightarrow x=\sqrt[4]{2}$

$\therefore a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt[4]{8}=2^{\frac{3}{4}}$

(3) $\because f(x),g(x)$取最小值時，x條件不同$\Rightarrow f(x)+g(x)>a+b$

(4) $g(x),h(x)$取最小值時，x的條件相同

$\therefore g(x)+h(x)\geq b+c$且最小時為$b+c$

答：(2)(4)

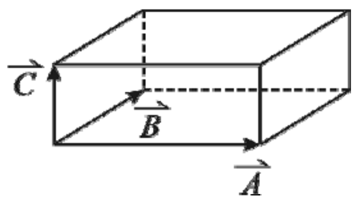
$\boxed{(乙)柯西不等式}$

【範例一】設x,y,z為實數，若$x^2+y^2+z^2=6$，則$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\x&y&z\end{vmatrix}$最大值為____。

$\boxed{解一}$：$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\x&y&z\end{vmatrix}=-x-y-z$

$\because(x^2+y^2+z^2)((-1)^2+(-1)^2+(-1)^2)\geq(-x-y-z)^2$

$\therefore -3\sqrt{2}\leq -x-y-z\leq 3\sqrt{2}$



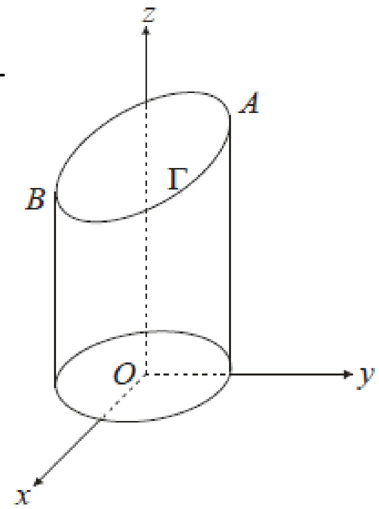
$\boxed{解二}$：令$\vec{A}=(1,2,-1)$，$\vec{B}=(1,1,0)$

$\therefore\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|(1,-1,-1)\right|=\sqrt{3}$

令$\vec{C}=(x,y,z)$　$\therefore\left|\vec{C}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6}$

$\therefore$所求最大為$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\cdot\left|\vec{C}\right|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

【範例二】坐標空間中，一直圓柱$\Omega:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z\in R\end{cases}$為以$z$軸為中心軸，



被xy平面所截圖形為一個以原點O為圓心且半徑為1的圓。

平面$E:z=-3x+4y+15$截Ω得一曲線Γ，其部分圖形如右圖所示，令A,B分別表示Γ上z坐標值為最大、最小的點，則A,B兩點的到xy平面的高度相差________。

【101年研究用試卷】

$\boxed{解}$：圓柱Ω方程式為$x^2+y^2=1$

$\because (x^2+y^2)((-3)^2+4^2)\ge(-3x+4y)^2$

$\therefore -5\le -3x+4y\le 5\Rightarrow 10\le -3x+4y+15\le 20$

$\therefore z$最大20、最小10，

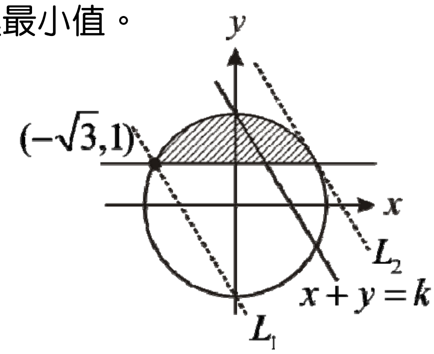
則A,B兩點的到xy平面的高度相差$20-10=10$

（丙）線性規劃

【範例一】設R代表坐標平面上由下列兩個不等式所定義的區域，

$$\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ y\ge 1\end{cases}$$

求函數$x+y$在區域R上的最大值與最小值。



$\boxed{解}$：$x+y$最小代$(-\sqrt{3},1)\Rightarrow 1-\sqrt{3}$

令$x+y=k$（L）

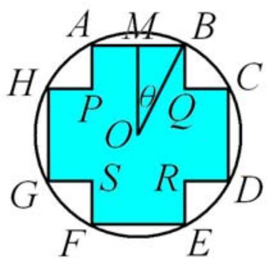
$d(O,L)\le 2\quad \therefore \dfrac{k}{\sqrt{2}}\le 2$

$k\le 2\sqrt{2}\quad \therefore x+y$最大$2\sqrt{2}$

答：最大值$2\sqrt{2}$，最小值$1-\sqrt{3}$

(丁)正餘弦函數的疊合

【範例一】如圖，一個「✞」字型的圖形內接於半徑為1的圓，其中$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{GH}$，$\overline{BQ}=\overline{CQ}=\overline{DR}=\overline{RE}=\overline{FS}=\overline{SG}=\overline{HP}=\overline{AP}$，且$\angle BQC=\angle ERD=\angle GSF=\angle APH=90^\circ$，則陰影部分面積最大值為__________。



$\boxed{解}$：取$\angle BOM=\theta\Rightarrow\overline{BM}=\sin\theta$，$\overline{OM}=\cos\theta$

$$所求面積=(2\sin\theta)(2\cos\theta)\times2-(2\sin\theta)^2=4\sin2\theta-4\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$=4\sin2\theta+2\cos2\theta-2\le\sqrt{20}-2=2\sqrt{5}-2$$

(戊)利用微分求極值

【範例一】傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為12公分且以每秒1公分的等速率縮短，而長度以每秒20公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從12公分縮到4公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為10公分時其體積最大。

(1) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？

(2) 試求定海神針原來的長度。

(3) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

【95年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) $\dfrac{12-10}{1}=2$秒

(2) 設原長度為n公分，變形x秒之體積

$f(x)=\pi(12-x)^2(n+20x)\quad f'(x)=\pi(x-12)(60x+2n-240)$

$f'(2)=0\Rightarrow n=60$

(3) $f(0)=8640\pi\quad f(8)=3520\pi$為最小　長度$=n+20x=220$

【範例二】考慮多項式函數$f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：

(1) 函數f的圖形在點$(1,-1)$的切線斜率為正

(2) 函數f的圖形與直線$y=1$交於三點

(3) 函數 f 的唯一相對極小值為 $\dfrac{-9}{4}$

(4) $f(\pi)>0$　(5) $f(\cos\dfrac{4\pi}{7})>0$　【103 年指考數甲】

$\boxed{解}$：$f'(x)=12x^2-22x+6$

(1) 在點 $(1,-1)$ 的切線斜率為 $f'(1)=12-22+6=-4<0$

(2)(3) $f'(x)=2(3x-1)(2x-3)\therefore f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$

相對極大值 $=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{25}{27}$，相對極小值 $=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$

(4) $\because f(3)>0\Rightarrow f(\pi)>0$　$\because\cos\dfrac{4\pi}{7}<0\Rightarrow f\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)<0$

故選(3)(4)

【範例三】設函數 $f(x)$ 為一可微分函數，P 為 $y=f(x)$ 圖形上距離原點 O 最近的一點　【85 年日大】

(1) 若 P 點的坐標為 $(a,f(a))$，試證 $a+f(a)f'(a)=0$

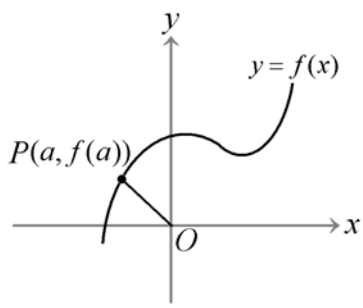
(2) 若 $y=f(x)$ 之圖形不通過原點，試利用第(1)小題之結果，證明直線 OP 為 $y=f(x)$ 之圖形上過 P 點之法線。

$\boxed{解}$：(1) $\overline{OP}^2=a^2+f^2(a)$　$\therefore$ 令 $F(x)=x^2+f^2(x)=x^2+f(x)\cdot f(x)$

$F'(x)=2x+f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2x+2f'(x)f(x)$

$\therefore$ 由已知 $F'(a)=0$　$\Rightarrow 2a+2f(a)f'(a)=0$

$\therefore a+f(a)f'(a)=0$



(2) $\overleftrightarrow{OP}$ 斜率 $m=\dfrac{f(a)}{a}$

$\because a\neq 0$　由(1) $f(a)f'(a)=-a$

$\therefore \dfrac{f(a)}{a}\cdot f'(a)=-1$

$\therefore \overleftrightarrow{OP}$ 與過 P 之切線垂直　$\therefore \overleftrightarrow{OP}$ 為 $y=f(x)$ 之圖形上過 P 點之法線

第三重點：聯立方程組及其幾何意義

(甲)加減消去法

【範例一】當n為正整數時，令$x=a_n$ 、 $y=b_n$ 、 $z=c_n$為三元一次聯立

方程組$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$ 之唯一解，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________。

解：$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2z \\ x=z \end{cases}$代入第3式

得$-2nz-2nz+3z=8n \Rightarrow z=\dfrac{8n}{3-4n}=x \quad \therefore a_n=\dfrac{8n}{3-4n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{3-4n}=-2$

(乙)矩陣列運算

【範例一】設a,b,c為實數，下列有關線性方程組$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$的敘述

哪些是正確的？

(1) 若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2) 若此線性方程組有解，則$11a-3b\neq 7$

(3) 若此線性方程組有解，則$c=14$

(4) 若此線性方程組無解，則$11a-3b=7$

(5) 若此線性方程組無解，則$c\neq 14$ 【98年學測】

解： $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 4 & b & -1 \\ 2 & 10 & 7 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & b-3a & -4 \\ 0 & 6 & 7-2a & c-2 \end{bmatrix} \times 3$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -2 & b-3a & -4 \\ 0 & 0 & 7-11a+3b & c-14 \end{bmatrix}$

故① $7-11a+3b=0$，$c-14\neq 0$無解，即$11a-3b=7$，$c\neq 14$無解

② $7-11a+3b=0$，$c=14$ 無限多解

③ $7-11a+3b\neq 0$ 唯一解 選(4)(5)

(丙)克拉瑪公式

$$\begin{cases} E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ (*) \\ E_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

(1) 若$\Delta \neq 0$，則方程組(＊)恰有一解，即平面E_1, E_2, E_3恰有一交點

(2) 若$\Delta = 0$，而$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$中至少有一不為$0$，則(＊)無解。

可能情況為

① 其中有二平面平行，而另一平面與此二平行平面均相交於一直線。

② 三平面兩兩相交於一直線但三交線不共點。

(3) 若$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$，則(＊)可能有無限多解，也可能無解，

可能之狀況為

無限多解之情形：

① 三平面重合。

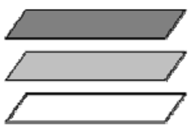
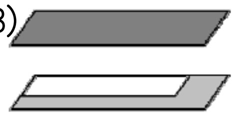
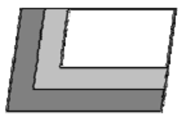
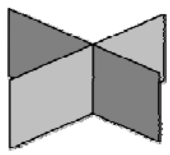
② 其中有二平面重合，而另一個平面與之相交於一直線。

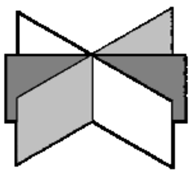
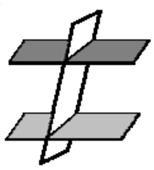
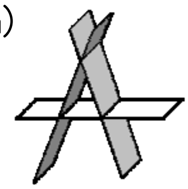
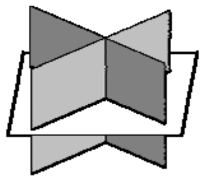
③ 兩兩不重合，但相交於一直線。

無解之情形：

① 其中有二平面重合，而另一個平面與之平行。

② 兩兩平行。

(A)

(B)

(C)

(D)


(E)

(F)

(G)

(H)


【範例一】試求下列哪些t值，可將矩陣$\begin{bmatrix} 1-t & 2 & 3 & a \\ 1 & 2-t & 3 & b \\ 1 & 2 & 3-t & c \end{bmatrix}$透過列運算，

變為$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$，其中$a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$為實數。

(1) -1　(2) 0　(3) 1　(4) 2　(5) 6

$\boxed{解}$：原矩陣透過列運算，變為$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$

代表原方程組恰有一組解，所以$\begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 1 & 2 & 3-t \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow (6-t)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 1 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = (6-t)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = t^2(6-t) \neq 0$

，故$t \neq 0$且$t \neq 6$

【範例二】設 $\pi_a : x-4y+az=10$（a為常數）、$E_1 : x-2y+z=5$ 及 $E_2 : 2x-5y+4z=-3$為坐標空間中的三個平面。

試問下列哪些敘述是正確的?

(1) 存在實數a使得π_a與E_1平行；

(2) 存在實數a使得π_a與E_1垂直；

(3) 存在實數a使得π_a，E_1，E_2交於一點；

(4) 存在實數a使得π_a，E_1，E_2交於一直線；

(5) 存在實數a使得π_a，E_1，E_2沒有共同交點。　　　【92年學測】

$\boxed{解}$：(1) $F_a // E_1 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{a}{1} \Rightarrow a$無解

(2) $F_a \perp E_1 \Rightarrow (1,-4,a)\cdot(1,-2,1)=0 \Rightarrow a=-9$

(3) F_a, E_1, E_2交於一點$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$且$a \neq 5$

(4) $\Delta=0$時，$a=5$，此時$\Delta_x=\begin{vmatrix}10 & -4 & a\\ 5 & -2 & 1\\ -3 & -5 & 4\end{vmatrix}\neq 0$

$\therefore F_a , E_1 , E_2$不可能交於一直線

(5) 由(4)，$a=5$時，F_a , E_1 , E_2沒有交點，故選(2)(3)(5)

【範例三】$\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x+3y+az=3\\ x+ay+3z=2\end{cases}$相交於一線，則$a=$______，若此交線方程式

為$\begin{cases}x=x_0+5t\\ y=1+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，則$x_0+z_0+m+n=$______。

$\boxed{解}$：相交一直線$\Rightarrow$無限多解　　$\therefore \Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

$\Delta_z=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$　　交線$\begin{cases}x+y-z=1\\ x+2y+3z=2\end{cases}$

方向向量$\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(5,-4,1)=(5,m,n)$

代$y=1\Rightarrow\begin{cases}x-z=0\\ x+3z=0\end{cases}\Rightarrow\therefore x=z=0$　　$\therefore (x_0,1,z_0)=(0,1,0)$

$x_0+z_0+m+n=0+0-4+1=-3$

$\boxed{(丁)利用反方陣}$

【範例一】考慮一次方程組$M_t\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$，其中$M_t=\begin{bmatrix}t & 1\\ 3-t & t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ t+3 & 3t+1\end{bmatrix}$，

$t\in\mathbb{R}$，則：

(1)使此方程組有解的充要條件為________。

(2)若$t=0$，$a=0$，$b=-1$，則$\det(M_0{}^{-1})=$________，且

$(x,y)=$________。　　　　【84年日大】

$\boxed{解}$：(1) 有解充要條件為$\det M_t\neq 0\ \therefore\begin{vmatrix}t & 1\\ 3-t & t+1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ t+3 & 3t+1\end{vmatrix}\neq 0$

$\therefore (t^2+2t-3)(t-5)\neq 0\Rightarrow t\neq -3$，$1$，$5$

(2) $M_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\6 & 7\end{bmatrix}$ $\therefore \det(M_0{}^{-1})=\dfrac{1}{\det M_0}=\dfrac{1}{15}$

又 $\begin{bmatrix}3 & 1\\6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\6 & 7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix}7 & -1\\-6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{15}\\-\dfrac{1}{5}\end{bmatrix}$

$\therefore (x\,,y)=(\dfrac{1}{15},\dfrac{-1}{5})$

第四重點：面積與體積

(甲) 二度空間的面積

(1) $\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=r\cdot s=\dfrac{abc}{4R}$

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

(若 $\overrightarrow{AB}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{AC}=(b_1,b_2)$)

(3) 於 xy 平面上設 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，

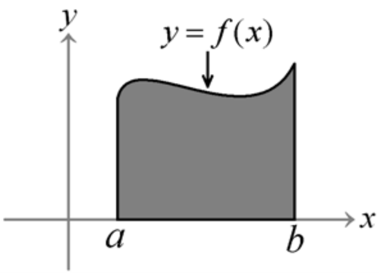
則 $\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 之絕對值。

(4) 設 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 且 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若 A,B,C 經 M

變換後之像分別為 $A'B'C'$，則 $\triangle A'B'C'$ 面積$=\triangle ABC$ 面積$\times\left|\det(M)\right|$。

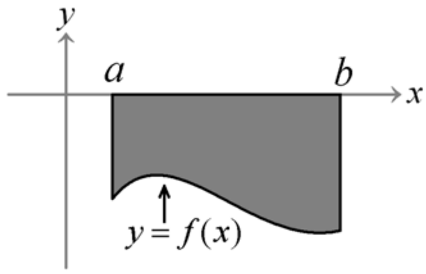
(5) A 表面積，則 $x\in[a$，$b]$時 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍面積如下：

(A)



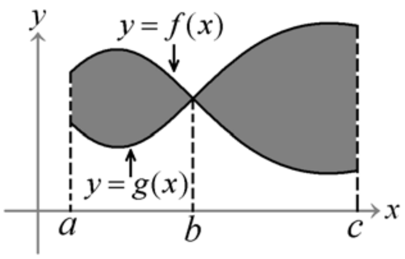
$A=\int_a^b f(x)dx$

(B)



$A=-\int_a^b f(x)dx$

(C)

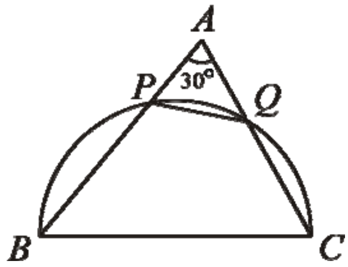


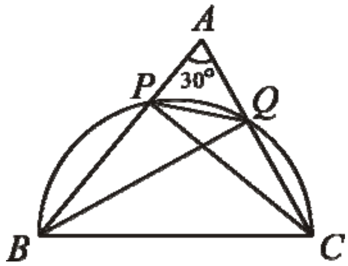
$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx+\int_b^c[g(x)-f(x)]dx$

【範例一】如圖所示，銳角$\triangle ABC$，$\angle A=30^\circ$，

以$\overline{BC}$為直徑作圓，此圓交$\overline{AB}$於P，

交$\overline{AC}$於Q，則面積比$\dfrac{\triangle APQ}{\triangle ABC}=$________。





$\boxed{解}$：$\dfrac{\triangle APQ}{\triangle ABC}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin A}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}}\cdot\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$

$=\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{4}$

【範例二】設$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$所張平行四邊形面積為3，則以$3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$為所張出的平行四邊形面積為________。

$\boxed{解}$：令$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$　$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=3$

$3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(3a_1+b_1,3a_2+b_2)$　$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

$\therefore$所求$=\begin{vmatrix} 3a_1+b_1 & 3a_2+b_2 \\ a_1-b_1 & a_2-b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a_1+b_1 & a_1-b_1 \\ 3a_2+b_2 & a_2-b_2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3\times|-4|=12$

【範例三】已知$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$且$\triangle ABC$面積為10，若

$P_1(3x_1-4y_1,5y_1-6x_1)$、$P_2(3x_2-4y_2,5y_2-6x_2)$、

$P_3(3x_3-4y_3,5y_3-6x_3)$，則$\triangle P_1P_2P_3$面積為________。

$\boxed{解}$：$\begin{bmatrix} 3x_1-4y_1 & 3x_2-4y_2 & 3x_3-4y_3 \\ 5y_1-6x_1 & 5y_2-6x_2 & 5y_3-6x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$

$\therefore \triangle P_1P_2P_3$面積$=10\times\left|\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}\right|=90$

【範例四】下列哪些二階方陣可以使$\triangle ABC$經該方陣變換後面積持不變？

(1) $\begin{bmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} \cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & -\cos 20^\circ \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{解}$：$\triangle ABC$ 經方陣 M 變換後面積不變，則 $|\det(M)|=1$

檢查得(1)(2)(4)(5)之行列式絕對值均為1

【範例五】設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。經平面線性變換 M 作用後，A 被映射至 $A'(1,\sqrt{2})$、B 被映射至 $B'(-1,\sqrt{2})$，而 C 被映射至 C'。

(1) 試問變換 M 的矩陣為何？

(2) 試證明變換 M 將 $\triangle ABC$ 的重心映射至 $\triangle A'B'C'$ 的重心。

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。

$\boxed{解}$：(1) $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(2) 令 $C(a,b) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-b \\ \sqrt{2}a+\sqrt{2}b \end{bmatrix}$

$\therefore C'\left(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b\right) \Rightarrow \triangle ABC$ 重心 $\left(\dfrac{1+a}{3},\dfrac{1+b}{3}\right)$

$\triangle A'B'C'$ 重心 $=\left(\dfrac{a-b}{3},\dfrac{\sqrt{2}\left(2+a+b\right)}{3}\right)$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1+a}{3} \\ \dfrac{1+b}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{a-b}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}\left(2+a+b\right)}{3} \end{bmatrix}$$

故 M 將 $\triangle ABC$ 的重心變換到 $\triangle A'B'C'$ 的重心

(3) $\triangle A'B'C'$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積 $\times|\det M|=3\times\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix}\right|=6\sqrt{2}$

又 $\overline{A'B'}=2 \Rightarrow \triangle A'B'C'$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot d\left(C',\overleftrightarrow{A'B'}\right)=6\sqrt{2}$

$\therefore d\left(C',\overleftrightarrow{A'B'}\right)=6\sqrt{2}$

【範例六】設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式。已知原點 $(0,0)$ 為函數 $y=f(x)$ 的圖形之反曲點，且此圖形在原點的切線為 $y=-x$ 。

(1) 試求 b、c、d。

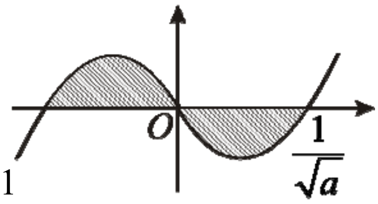
(2) 若 $a>0$ 且 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍的有界區域面積為 2 ，試求 a。 【99 年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) 過 $(0,0)$ $\quad \therefore d=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \because f'(0)=-1 \quad \therefore c=-1$

$f''(x)=4ax+2b \quad \because f''(0)=0 \quad \therefore b=0$

(2) $f(x)=ax^3-x$



$\because$ 反曲點 $(0,0)$ 為三次曲線的對稱中心

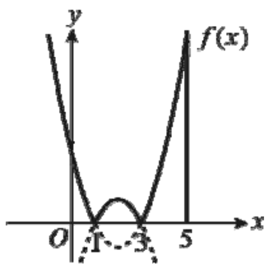
故所圍之有界區域面積(在 y 軸兩側)各為 1

$$\therefore 1=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)\,dx=-\left(\frac{ax^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}=\frac{1}{4a} \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

【範例七】設 $\int_0^5\left|x^2-4x+3\right|dx=s$ ，$\int_0^5(x^2-4x+3)dx=t$ ，求 $s-t=$________。

$\boxed{解}$：令函數 $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-1)(x-3)\right|$ ，

因此 $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ 圖形如右圖所示：

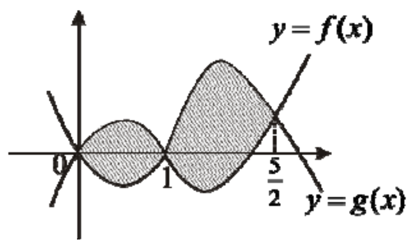


$$\therefore s-t=-2\int_1^3(x^2-4x+3)dx=(-2)\cdot\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=\frac{8}{3}$$

【範例八】函數 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 與 $g(x)=-x^3+4x^2-3x$ 所圍區域面積為________。

$\boxed{解}$：$x^3-3x^2+2x=-x^3+4x^2-3x$

$\therefore 2x^3-7x^2+5x=0 \qquad \therefore x=0,1,\frac{5}{2}$



$$所圍面積=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx+\int_1^{\frac{5}{2}}\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1(2x^3-7x^2+5x)dx+\int_1^{\frac{5}{2}}(-2x^3+7x^2-5x)dx=\frac{2}{3}+\frac{63}{32}=\frac{253}{96}$$

(乙) 三度空間的面積與體積

(A) 三度空間的面積：設$\overrightarrow{OA}=\left(a_1,a_2,a_3\right),\overrightarrow{OB}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$，

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

則$\triangle OAB$面積$=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|$

(B) 三度空間的體積：設$\overrightarrow{A}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{B}=(b_1,b_2,b_3)$、$\overrightarrow{C}=(c_1,c_2,c_3)$

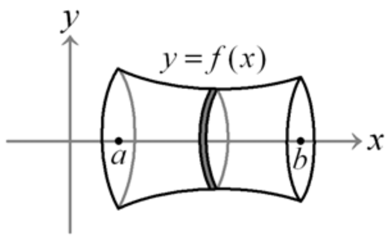
(1) $\left|\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})\right|=\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|=\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$、$\overrightarrow{C}$所決定的**平行六面體**體積

(2) $\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})\right|=\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|=\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$、$\overrightarrow{C}$所決定的**四面體**體積

(C) 旋轉體體積：

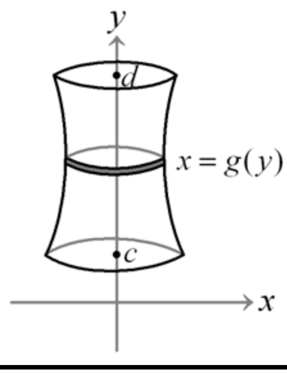
(1) $y=f(x)\geq 0$在$x\in[a$，$b]$中連續，則其繞x軸旋轉所得之體積為

$\Rightarrow\int_a^b \pi[\,f(x)\,]^2\,dx$



(2) $x=g(y)\geq 0$在$y\in[\,c$，$d\,]$中連續，則其繞y軸旋轉所得之體積為

$\Rightarrow\int_c^d \pi[\,g(y)\,]^2\,dy$



【範例一】若空間中四點$(1,1,1)$、$(3,4,5)$、$(1,2,k)$、$(4,5,k)$共平面，求 $k=$________。

$\boxed{解}$：$A(1,1,1)$、$B(3,4,5)$、$C(1,2,k)$、$D(4,5,k)$

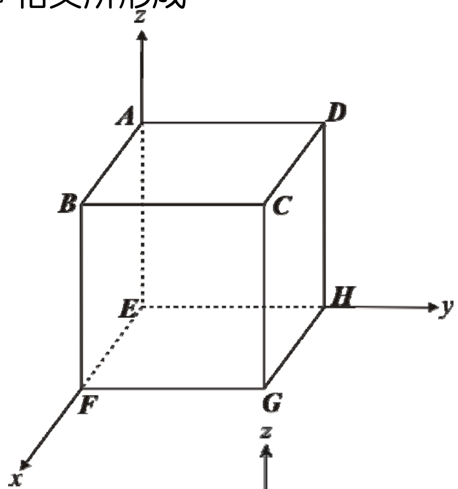
$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,3,4)$、$\overrightarrow{AC}=(0,1,k-1)$、$\overrightarrow{AD}=(3,4,k-1)$

$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 3 & 4 & k-1 \end{vmatrix}=0 \quad \therefore |3k-15|=0 \quad \therefore k=5$

【範例二】已知空間中$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$所展成平行六面體體積為$5$，則$2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$，$3\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{c}$所展成的平行六面體體積為________。

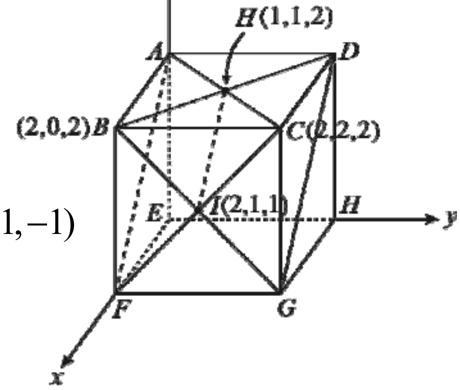
$\boxed{解}$：$\because \begin{Vmatrix} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{Vmatrix}=5 \quad \therefore \begin{Vmatrix} 2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b} \\ 3\overrightarrow{b}+4\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b} \\ 3\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2\overrightarrow{a} \\ 3\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{Vmatrix}=6\begin{Vmatrix} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{Vmatrix}=6\times 5=30$

【範例三】如圖所示，正立方體的邊長為2，其中點E為原點，點F、點H、點A的坐標分別為$(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)$。
令Ω表示四面體$CBGD$與四面體$BAFC$相交所形成的四面體。請選出正確的選項。



(1) Ω有一頂點坐標為$(1,1,2)$
(2) Ω有一稜線其方向向量為$(1,0,-1)$
(3) Ω有兩個側面互相垂直
(4) Ω僅有一個側面是正三角形
(5) Ω的體積為$\dfrac{2}{3}$

$\boxed{解}$：Ω為四面體$BCHI$



(1) $H(1,1,2)$　　(2) $\overrightarrow{HI}=(1,0,-1)$
(3) 平面BCH與平面BCI垂直
(4) $\triangle BHI$與$\triangle CHI$均為邊長$=\sqrt{2}$的正$\triangle$
(5) $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BH}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BI}=(0,1,-1)$

$$\therefore \Omega\text{體積}=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{3}$$

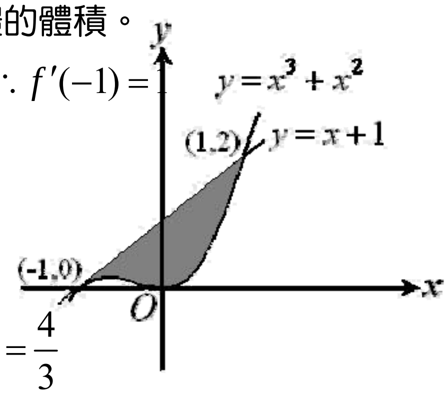
答：(1)(2)(3)

【範例四】已知點 $P(-1,0)$ 為函數 $f(x)=x^3+x^2$ 的圖形上一點，直線 L 為以 P 為切點之切線，求

(1) L 的方程式。

(2) $f(x)$ 的圖形與 L 所圍成之區域 R 的面積。

(3) 將區域 R 繞 x 軸旋轉一圈所得旋轉體的體積。



$\boxed{解}$：(1) $f(x)=x^3+x^2 \;\therefore f'(x)=3x^2+2x \;\therefore f'(-1)=1$

$\therefore$ 過 P 切線 $L: x-y+1=0$

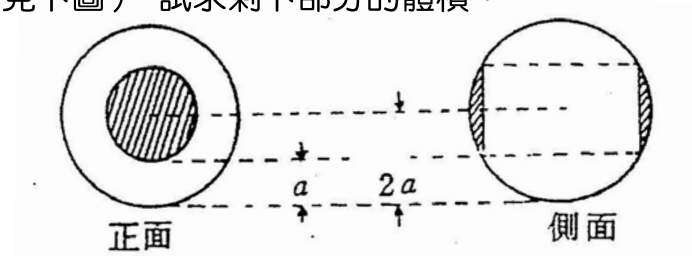
(2) $\begin{cases}y=x^3+x^2\\ y=x+1\end{cases}$ 交於 $(-1,0)$ 及 $(1,2)$

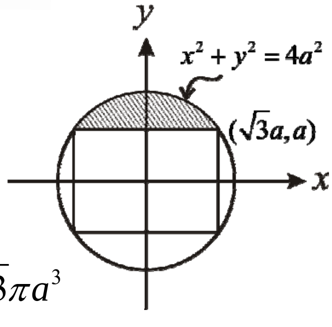
$\therefore R$ 面積 $=\int_{-1}^{1}\left[(x+1)-(x^3+x^2)\right]dx=\frac{4}{3}$

(3) 體積 $=\pi\int_{-1}^{1}\left[(x+1)^2-(x^3+x^2)^2\right]dx$

$=\pi\int_{-1}^{1}\left[-x^6-2x^5-x^4+x^2+2x+1\right]dx=\frac{208}{105}\pi$

【範例五】將半徑為 $2a$ 的球體，以一直徑為對稱軸，挖去半徑為 a 的圓柱孔道（參見下圖），試求剩下部分的體積。





$\boxed{解}$：所求體積 $=2\left[\int_0^{\sqrt{3}a}\pi y^2dx-\pi a^2\cdot\sqrt{3}a\right]$

$=2\pi\left[\int_0^{\sqrt{3}a}(4a^2-x^2)dx-\sqrt{3}a^3\right]$

$=2\pi\left[(4\sqrt{3}a^3-\sqrt{3}a^3)-\sqrt{3}a^3\right]=4\sqrt{3}\pi a^3$

第五重點：級數求和(含收斂與發散討論)

(甲)無窮等比級數

【範例一】(1) 已知a、b、c為正整數且$2<a<b<c\le 9$，若

$0.\overline{a}+0.0\overline{b}+0.00\overline{c}+\cdots$為無窮等比級數，則序$(a,b,c)=$________。

(2) 求(1)之級數和為________。

解：(1) 所求$=\dfrac{a}{9}+\dfrac{b}{90}+\dfrac{c}{900}+\cdots$，　$\therefore \dfrac{a}{9}\cdot\dfrac{c}{900}=(\dfrac{b}{90})^2$

$\therefore b^2=ac$，$\therefore (a,b,c)=(4,6,9)$。

(2) 公比$\dfrac{\frac{b}{90}}{\frac{a}{9}}=\dfrac{b}{10a}=\dfrac{6}{40}=\dfrac{3}{20}$ $\therefore$級數和$=\dfrac{\frac{a}{9}}{1-\frac{3}{20}}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{17}{20}}=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{20}{17}=\dfrac{80}{153}$

【範例二】無窮級數$1+\dfrac{1}{1+x}+(\dfrac{1}{1+x})^2+\cdots+(\dfrac{1}{1+x})^n+\cdots$，則

(1) 收斂時，x範圍為________，

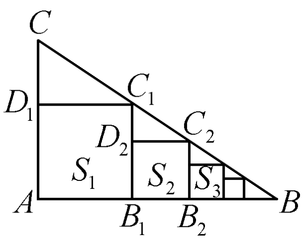
(2) 若此級數和為$2x$，則$x=$________。

解：(1) 收斂時公比$\left|\dfrac{1}{1+x}\right|<1$　$\therefore |1+x|>1$　$\therefore x+1>1$或$x+1<-1$

$\therefore x>0$或$x<-2$

(2) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+x}}=2x$　$\therefore \dfrac{1+x}{x}=2x$　$\therefore 2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$　$\therefore x=1$或$-\dfrac{1}{2}$(不合)



【範例三】已知$\triangle ABC$為直角三角形，$\overline{AB}=24,\overline{AC}=16$，在$\triangle ABC$內作一個內接正方形$AB_1C_1D_1$，其面積為$S_1$，在$\Delta B_1BC_1$內作第二個內接正方形$B_1B_2C_2D_2$，其面積為$S_2$，仿此繼續進行，求所有正方形面積的和。

解：設$\overline{AB_1}=\overline{AD_1}=x$　$\because \triangle CD_1C_1\sim\triangle CAB$

$\therefore \dfrac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1C_1}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$　$\Rightarrow \dfrac{16-x}{x}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$　$\therefore x=\dfrac{48}{5}$ $\therefore a_1=(\dfrac{48}{5})^2=\dfrac{2304}{25}$

$$\therefore r=(\frac{\overline{C_2B_2}}{\overline{C_1B_1}})^2=(\frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{CA}})^2=(\frac{48/5}{16})^2=(\frac{3}{5})^2 \therefore S=\frac{(\frac{48}{5})^2}{1-(\frac{3}{5})^2}=144$$

【範例四】令 $S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，則：

(1) $S_n=$________。

(2) 若 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，且 $\left|S_n-S\right|<0.001$，則最小之正整數 n 值為____。

$\boxed{解}$：(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$$

(2) $S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

$|S_n-S|=|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{4n+2}<0.001 \quad \therefore 4n+2>1000$

$\Rightarrow n>249.5 \quad \therefore n$ 最小 250

$\boxed{\text{(乙)數列極限(含夾擠定理)}}$

【範例一】設 n 為正整數，方程式 $x^2-2x-n=0$ 的兩根為 a_n 與 b_n，且 $a_n>b_n$。試問下列哪些選項是正確的?

(1) $a_n>0$ 對所有 n 皆成立　(2) $a_n+b_n=2$ 對所有 n 皆成立

(3) $b_{n+1}>b_n$ 對所有 n 皆成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{n}=1$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$　　【97 年指考數甲】

$\boxed{解}$：$a_n=1+\sqrt{1+n}$，$b_n=1-\sqrt{1+n}$

(1) $a_n>0$　(2) $a_n+b_n=2$　(3) $\forall n\in N$，$b_{n+1}<b_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot a_{n+1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{1+n})(1+\sqrt{2+n})}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}})(\frac{1+\sqrt{2+n}}{\sqrt{n}})=1\times1=1$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}}=2$，選(1)(2)(4)(5)

【範例二】對一實數a，以$[a]$表示不大於a的最大整數，例如：$[1.2]=\left[\sqrt{2}\right]=1$，$[-1.2]=-2$。考慮無理數$\theta=\sqrt{10001}$，試選出正確的選項。已知$n$為正整數，則下列哪些選向是正確的？

(1) $a-1<[a]\le a$對任意實數a均成立

(2) 數列$b_n=\dfrac{[n\theta]}{n}$發散，n為正整數

(3) 數列$c_n=\dfrac{[-n\theta]}{n}$發散，$n$為正整數

(4) 數列$d_n=n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]$發散，$n$為正整數

(5) 數列$e_n=n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]$發散，$n$為正整數　　【109 指考數甲】

$\boxed{解}$：(2) $n\theta-1<[n\theta]\le n\theta\Rightarrow\theta-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[n\theta]}{n}\le\theta$

$$\lim_{n\to\infty}(\theta-\frac{1}{n})\le\lim_{n\to\infty}\frac{[n\theta]}{n}\le\lim_{n\to\infty}\theta\therefore\theta\le\lim_{n\to\infty}\frac{[n\theta]}{n}\le\theta$$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[n\theta]}{n}=\theta\Rightarrow$收斂

(3) $-n\theta-1<[-n\theta]\le-n\theta\Rightarrow-\theta-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[-n\theta]}{n}\le-\theta$

$$\lim_{n\to\infty}(-\theta-\frac{1}{n})\le\lim_{n\to\infty}\frac{[-n\theta]}{n}\le\lim_{n\to\infty}(-\theta)\therefore-\theta\le\lim_{n\to\infty}\frac{[-n\theta]}{n}\le-\theta$$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[-n\theta]}{n}=-\theta\Rightarrow$收斂

(4) 當$n>\theta\Rightarrow0<\dfrac{\theta}{n}<1\Rightarrow\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0\therefore n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{\theta}{n}\right]=0\Rightarrow$收斂

(5) 當$n>\theta\Rightarrow-1<\dfrac{-\theta}{n}<0\Rightarrow\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=-1\therefore n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=-n$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{-\theta}{n}\right]=-\infty\Rightarrow$發散　　選(1)(5)

【範例三】令多項式$2(x+1)^n$除以$(3x-2)^n$所得餘式的常數項為r_n。

請問極限$\lim\limits_{n\to\infty} r_n$為下列哪一選項？

(1) 0　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) 2　(4) 3　(5) 不存在　【103年指考數甲】

$\boxed{解}$：已知$2\left(x+1\right)^n=\left(3x-2\right)^n\cdot\dfrac{2}{3^n}+R\left(x\right)$

$x=0$代入$2=\left(-2\right)^n\cdot\dfrac{2}{3^n}+R\left(0\right)=\left(-1\right)^n\cdot 2\dfrac{\left(-2\right)^n}{\left(-3\right)^n}+r_n$

$\therefore r_n=2-\left(-1\right)^n\cdot 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　　$\lim\limits_{x\to\infty} r_n=2$

【範例四】設$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$為兩實數數列，且對所有的正整數$n$，$a_n<{b_n}^2<a_{n+1}$均成立。若已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$，試選出正確的選項。

(1) 對所有的正整數n，$a_n>3$均成立

(2) 存在正整數n，使得$a_{n+1}>4$

(3) 對所有的正整數n，${b_n}^2<{b_{n+1}}^2$均成立

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} {b_n}^2=4$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$或$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$　【108指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) 令$a_n=4-\dfrac{3}{n}$，則未必成立

(2) $\because a_n\uparrow$且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$　$\therefore a_n\le 4$，$\forall n\in\mathbb{N}$

(3) $\begin{cases} a_n<b_n^2<a_{n+1} \\ a_{n+1}<b_{n+1}^2<a_{n+2}\end{cases}\Rightarrow b_n^2<b_{n+1}^2$

(4) 夾擠定理：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\le\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2\le\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2=4$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$可能不存在，例：設$a_n>0$，$b_n=\left(-1\right)^n\sqrt{\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}}$ 選(3)(4)

(丙)函數極限

【範例一】考慮兩個函數 $f(x)=\begin{cases}1+x, x\le 1\\ 1, \quad x>1\end{cases}$、$g(x)=\begin{cases}1, \quad x\le 1\\ 3-x, x>1\end{cases}$。關於函數的極限，試選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在、$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$存在、$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$存在

(2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在、$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在、$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$不存在

(3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在、$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$存在、$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$不存在

(4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在、$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在、$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$存在

(5) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在、$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在、$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$不存在

【109年指考數甲(補)】

解：① $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在

② $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \therefore \lim\limits_{x\to 1} g(x)$不存在

③ $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x+1)=3$，

$\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+(3-x))=3$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+g(x))$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$存在

選(4)

【範例二】設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$存在 (2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$存在 (3) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1)\dfrac{x}{|x|}$存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在 (5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$存在 【107年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{|x|^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}f(x)\dfrac{|x|}{x}$存在

(3) 反例： $f(x)=0$

(4) 反例： $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

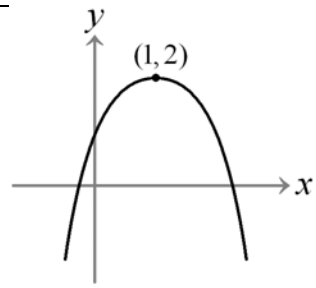
(5) $\because\lim\limits_{x\to0}f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}f(x)\dfrac{|x|}{x}$存在

$\therefore\lim\limits_{x\to0}(f(x)\dfrac{x}{|x|})\cdot(f(x)\dfrac{|x|}{x})=\lim\limits_{x\to0}f(x)^2$存在　選(1)(2)(5)

$\boxed{\text{(丁)黎曼和(含上和與下和)}}$

【範例一】由函數 $f(x)=-x^2+2x+1$的圖形與x軸，y軸及$x=1$所圍成之區域中，求上和$U_n=$________，下和$L_n=$________，

又若 $U_n-L_n<10^{-2}$，則n最小為何________。



$\boxed{解}$：上和$U_n=\dfrac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$

$=\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k)=\dfrac{1-0}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n})$

$=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(-\dfrac{k^2}{n^2}+2\cdot\dfrac{k}{n}+1)$

$=\dfrac{1}{n}\cdot(-\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+n)$

$=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}$

同理可得下和$=\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}$

$\therefore U_n-L_n=\dfrac{1}{n}<10^{-2}$　　$\therefore n>100$，即n最小取101

【範例二】設 $f(x)=-x^2+499$，且 $A=\int_0^{10} f(x)dx$、$B=\sum_{n=0}^{9} f(n)$、$C=\sum_{n=1}^{10} f(n)$、$D=\sum_{n=0}^{9}\frac{f(n)+f(n+1)}{2}$ 試選出正確的選項。

(1) A 表示在坐標平面上函數 $y=-x^2+499$ 的圖形與直線 $y=0$、$x=0$、$x=10$ 所圍成的有界區域的面積

(2) $B<C$ (3) $B<A$ (4) $C<D$ (5) $A<D$ 【107 年指考數甲】

$\boxed{解}$：因 $0\le x\le 10$ 時，$y=f(x)$ 曲線在軸上方且為遞減

$\therefore A$ 為曲線下面積，B 為上和，C 為下和，D 為梯形法

$\therefore B>A>D>C$ 選(1)(4)

第六重點：投影、對稱、距離與夾角

(甲) 坐標軸與坐標平面(含點、線段與面積的投影)

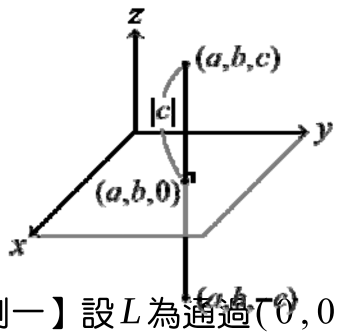
(a,b,c)

(1) 到 x 軸投影________。　(2) 到 yz 平面投影________。

(3) 到 x 軸距離________。　(4) 到 yz 平面距離________。

(5) 到 x 軸對稱點________。　(6) 到 yz 平面對稱點________。

解：



(1) $(a,0,0)$　(2) $(0,b,c)$

(3) $\sqrt{b^2+c^2}$　(4) $|a|$

(5) $(a,-b,-c)$　(6) $(-a,b,c)$

【範例一】設 L 為通過 $(0,0,1)$ 與 $(1,2,5)$ 兩點之直線，則

(1) x 軸上距離 L 最近之點為______。(2) x 軸與 L 距離為________。

解：L 上之點可令為 $A(t,2t,4t+1)$，此點在 x 軸投影為 $B(t,0,0)$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2t)^2+(4t+1)^2}=\sqrt{20(t+\frac{1}{5})^2+\frac{1}{5}}$$

$$\therefore t=-\frac{1}{5}\text{時最小值為}\frac{1}{\sqrt{5}}\text{，此時點 }B(-\frac{1}{5},0,0)$$

(乙) 一般直線與平面(含點、線段與面積的投影)

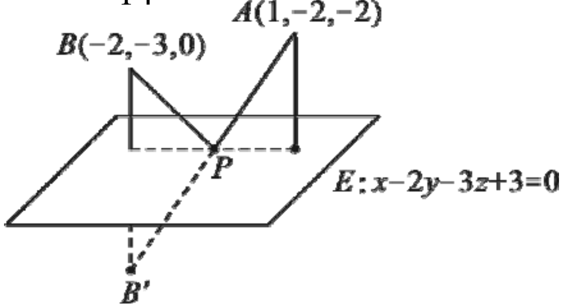
【範例一】在空間坐標中，設平面 $E:x-2y-3z+3=0$ 為一鏡面，若有一光線自點 $A(1,-2,-2)$ 射向鏡面 E 上一點後 P，經鏡面反射至點 $B(-2,-3,0)$，則光線路徑 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 長為________。

解：$B(-2,-3,0)$ 對 $E:x-2y-3z+3=0$

對稱點 $B'(-2-\frac{2\times 7}{14},-3-\frac{(-4)\times 7}{14},0-\frac{(-6)\times 7}{14})=(-3,-1,3)$

所求 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}=\overline{AB'}$

$=\sqrt{16+1+25}=\sqrt{42}$



【範例二】二平行直線：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$，$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$之距離為____。

$\boxed{解}$：取$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$上一點$A(-1,1,0)$

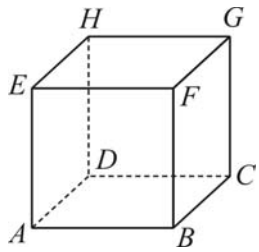
而$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$之點可表為$B(1+2t,2t,-2+t)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(2t+2)^2+(2t-1)^2+(-2+t)^2}=\sqrt{9t^2+9}$

$t=0$得最小值3即為距離

【範例三】如圖所示，空間中的正立方體，若直線HD為

$\dfrac{x-8}{6}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-5}{2}$，直線$FG$為$\begin{cases}2x+z=0\\2x-3y=0\end{cases}$，



則H點的坐標為________。

$\boxed{解}$：令$H(6t+8,-3t+3,2t+5),G(3s,2s,-6s)$

$\therefore \overrightarrow{HG}=(3s-6t-8,2s+3t-3,-6s-2t-5)$

$$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{HG}\cdot(6,-3,2)=0\Rightarrow -49t-49=0\therefore t=-1\\ \overrightarrow{HG}\cdot(3,2,-6)=0\Rightarrow 49s=0\therefore s=0\end{cases}\quad \therefore H(2,6,3)$$

(丙) 向量的投影

【範例一】設$A(1,0,1)$，$B(3,-1,2)$，$C(0,1,-1)$，則：

(1) $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$之正射影為______。

(2) 點B在$\overleftrightarrow{AC}$上正射影坐標為______。

$\boxed{解}$：$\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,-2)$

(1) 正射影$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-5}{6}(-1,1,-2)=(\dfrac{5}{6},-\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{3})$

(2) $(x-1,y,z-1)=(\dfrac{5}{6},-\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{3})\quad \therefore H(x,y,z)=(\dfrac{11}{6},-\dfrac{5}{6},\dfrac{8}{3})$

(丁)夾角

【範例一】坐標平面上以原點O為圓心的單位圓上三相異點A,B,C滿足

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中$A$點的坐標為$(1,0)$。試選出正確的選項。

(1) 向量$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$的長度為4

(2) 內積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

(3) $\angle BOC,\angle AOC,\angle AOB$中，以$\angle BOC$的度數為最小

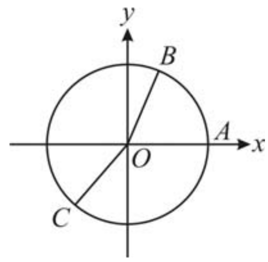
(4) $\overline{AB}>\dfrac{3}{2}$

(5) $3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$　　　　【108 年指考數甲】

解：(1) $\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\left|-4\overrightarrow{OC}\right|=4$

(2) $\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|-4\overrightarrow{OC}\right|^2\Rightarrow 4+9+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=16$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}>0\Rightarrow\cos\angle AOB=\dfrac{1}{4}$



(3) 由圖可知$\angle AOB$最小

(4) $\overline{AB}^2=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\angle AOB=2-2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}<\dfrac{3}{2}$

(5) $\because 2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\ \therefore\triangle OAB:\triangle OBC:\triangle OCA=4:2:3$

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\angle AOC}=\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow 3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$　　選(1)(5)

【範例二】坐標平面中，平面$ax+by+c=0$與平面$x=0$、$x+\sqrt{3}y=0$的夾角(介於0°到90°之間)都是60°，且$a^2+b^2+c^2=12$，則$\left(a^2,b^2,c^2\right)=$________。　　　【106 年指考數甲】

$\boxed{解}$：$\begin{cases} ax+by+cz=0 \Rightarrow \overrightarrow{N_1}=(a,b,c) \\ x=0 \qquad\qquad \Rightarrow \overrightarrow{N_2}=(1,0,0) \\ x+\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{N_3}=(1,\sqrt{3},0) \end{cases} \Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} \Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$

① $a=\sqrt{3}$ 且 $\Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_3}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_3}\right|} \Rightarrow b=1$

又 $a^2+b^2+c^2=12 \Rightarrow c^2=8$

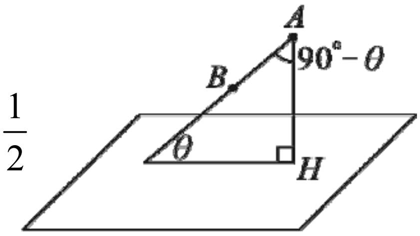
② $a=-\sqrt{3} \Rightarrow \cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_3}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_3}\right|} \Rightarrow b=3$

又 $a^2+b^2+c^2=12 \Rightarrow c^2=0 \quad \therefore (a^2,b^2,c^2)=(3,1,8)$ 或 $(3,9,0)$

【範例三】若 $A(1,-2,-2)$ 、 $B(-2,-3,0)$ ，則直線 AB 與平面 $E: x-2y-3z+3=0$ 之銳夾角餘弦值為________、$\overline{AB}$ 在 E 上投影之線段長為________。

$\boxed{解}$： $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,2)$ 、 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{N}=(1,-2,-3)$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{N}\right|}\right|=\frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$$



$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AB}$ 在 E 上投影之線段長為 $\overline{AB}\cos\theta=\sqrt{14}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{42}}{2}$

第七重點：微分與定積分的計算

【範例一】令 $f(x)=x(x-1)(x^3-2)$，試問有多少個實數 a 滿足

$\int_0^a f'(x)dx=0$？

（1）1個（2）2個（3）3個（4）4個（5）5個

【101年指考數甲】

解：$\int_0^a f'(x)dx=f(x)\Big|_0^a=f(a)-f(0)=0$　但 $f(0)=0$

$\therefore f(a)=a(a-1)(a^3-2)=0$　　$\therefore a=0,1,\sqrt[3]{2}$ 共3個

【範例二】已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x)=8x+11$，且 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，則 $f'(0)=$________。　【99年指考數甲】

解：$f'(x)=\int f''(x)dx=\int(8x+11)dx=4x^2+11x+c$

$\because f'(1)=0$　$\therefore 4+11+c=0\Rightarrow c=-15$

$\therefore f'(0)=c=-15$

【範例三】設 $f(x)$ 表一實係數多項式，若 $f(x)=4x^3+3x^2-2x(\int_1^2 f(x)dx)+3$，

則(1) $\int_1^2 f(x)dx=$________。　(2) $f(x)=$________。

解：令 $\int_1^2 f(x)dx=a$，則 $f(x)=4x^3+3x^2-2ax+3$

$\therefore a=\int_1^2(4x^3+3x^2-2ax+3)=(x^4+x^3-ax^2+3x)\Big|_1^2$　　$\therefore a=\dfrac{25}{4}$

【範例四】設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq 1$ 恆成立。試回答下列問題。

（1）試求 $f(1)$。（2）試求 $f'(x)$。　（3）試求 $f(x)$。

（4）試證明恰有一個大於1的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$。

【108年指考數甲】

解：（1）$x=1$ 代入 $\Rightarrow 1\cdot f(1)=3-2+1+0$ $\therefore f(1)=2$

（2）對兩邊微分：$\Rightarrow f(x)+xf'(x)=12x^3-6x^2+2x+f(x)$

$\therefore f'(x)=12x^2-6x+2$

(3) 由(2)知 $f(x)=4x^3-3x^2+2x+C$ 又 $f(1)=2$ $\therefore C=-1$

故 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

(4) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a\left(4x^3-3x^2+2x-1\right)dx$

$$=x^4-x^3+x^2-x\Big|_0^a=a^4-a^3+a^2-a$$

$$\therefore a^4-a^3+a^2-a=1$$

令 $g(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$ 又

x	0	1	≥ 2
$g(x)$	$-$	$-$	$+$

且當 $x\geq 1\Rightarrow g'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

$$=(x-1)(4x^2+x+3)+2>0\ \therefore g(x)\nearrow$$

故只有一個大於1之實根 a

【範例五】設四次多項式 $f(x)=x(1-x)(1+x^2)$

(1) 選取積分區間 $a\leq x\leq b$，使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最大值，

並求此最大值；

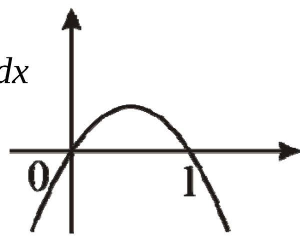
(2) 設 $c>0$，求證 $\int_{-c}^{c} f(x)dx$ 恆為負值。 【98年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) $\because f(x)=x(1-x)(1+x^2)$

由圖中得 $0\leq x\leq 1$ 時 $f(x)\geq 0$

$\therefore$ 最大值為 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-x^4+x^3-x^2+x)dx$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{60}$$



(2) $c>0$ 時

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx=\int_{-c}^{c}(-x^4+x^3-x^2+x)dx$$

$$=2\int_0^c(-x^4-x^2)dx=2(-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3)_0^c$$

$$=2(-\frac{1}{5}c^5-\frac{1}{3}c^3)<0，\forall c>0$$

【範例六】設 f 為一實係數多項式函數，已知：

（1）設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，其中 $a_n = \dfrac{f(n)}{n^4}$，若 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 5$，則 f 的次數為 4 次與最高次項係數為 5

（2）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 3$，則 f 的函數圖形在 $x=0$ 時的切線方程式為 $y=3x$

（3）若 f 滿足上面(1)與(2)的假設，且 $f''(0)=2$，試求 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 之值　　【101 年指考數甲】

$\boxed{解}$：由(2)得 $f(0)=0$， $f'(0)=3$

$\therefore$由(1)(2)得 $f(x)=5x^4+bx^3+cx^2+3x$，

$f'(x)=20x^3+3bx^2+2cx+3$

$f''(x)=60x^2+6bx+2c \quad \therefore f''(0)=2c=2 \quad \therefore c=1$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(5x^4+bx^3+x^2+3x\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(5x^4+x^2\right)dx = 2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

【範例七】某質點在數線上移動，已知其位置坐標為 $s(t)=\int_0^t(-x^2+6x)dx$，其中 t 表時間且 $0\le t\le 10$。若此質點的速度在時段 $0\le t<a$ 遞增，且在時段 $a<t\le 10$ 遞減，試選出正確的 a 值。

（1）3　（2）4（3）5　（4）6　（5）7　　【109 年指考數甲(補)】

$\boxed{解}$：$s'(t)=-t^2+6t, s''(t)=-2t+6=-2(t-3)$

$\therefore t<3 \Rightarrow s''(t)>0 \Rightarrow s'(t)\nearrow$

$\therefore t>3 \Rightarrow s''(t)<0 \Rightarrow s'(t)\searrow \qquad \therefore a=3$　選(1)

【範例八】設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a。已知在 $0\le x\le 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值為 12 發生在 $x=0$、$x=2$ 兩處。

另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，以及對任意實數 s,r（$s\le r$），$\int_s^r f(t)dt = G(r)-G(s)$ 恆成立，且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有(相對)極值。

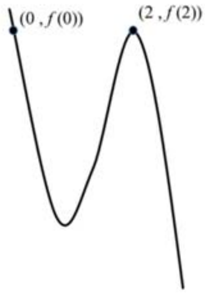
（1）試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形，在圖上標示 $(0,f(0))$、$(2,f(2))$，並由此說明 a 為正或負。

(2) 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解(如有重根須標示)，並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 有極值，求 a 之值。

(3) 在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。　　【105 年指考數甲】

解：(1) 由 $0\le x\le 3$，可知 $x=2$ 時為相對極大值

$\therefore a<0$，如圖



(2) 由(1) $f(x)=12$ 有三根 $0,2,2$

$\therefore f(x)-12=ax(x-2)^2$

$\Rightarrow f(x)=ax(x-2)^2+12$

$\because \int_0^x f(t)dx=G(x)-G(0)\Rightarrow f(x)=G'(x)$

$\because$ 函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有(相對)極值。

$\therefore f(1)=G'(1)=0\Rightarrow a+12=0$，得 $a=-12$

$\therefore f(x)=-12x(x-2)^2+12=-12(x^3-4x^2+4x-1)$

(3) $G'(x)=f(x)=-12(x-1)(x^2-3x+1)$

$$=-12(x-1)\left(x-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

x	0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		2
$G'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$G(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\therefore$ 當 $0\le x\le 2$ 時，極小值為 $G(0)$ 與 $G(1)$，又 $G(0)=0$

$G(1)=G(1)-G(0)=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1(-12x^3+48x^2-48x+12)dx$

$=-3x^4+16x^3-24x^2+12x\Big|_0^1=1$，故最小值為 $G(0)=0$

第八重點：複數的極式(含複數平面)

【範例一】設$Z_1=2+ai$，$Z_2=2b+(2-b)i$，其中a , $b\in R$，$i=\sqrt{-1}$，

若$|Z_1|=\sqrt{2}|Z_2|$且$\dfrac{Z_1}{Z_2}$之輻角為$\dfrac{\pi}{4}$，則數$(a,b)=$________。

【85 年日大自然組】

$\boxed{解}$：$\because \left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|=\sqrt{2}$，$Arg(\dfrac{Z_1}{Z_2})=\dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore \dfrac{Z_1}{Z_2}=\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

$\therefore \dfrac{2+ai}{2b+(2-b)i}=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)=1+i$

$\therefore 2+ai=\left[2b+(2-b)i\right](1+i)=(3b-2)+(b+2)i$

$\therefore 2=3b-2$，$a=b+2$ $\quad\therefore (a,b)=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

【範例二】設O為複數平面上的原點，並令點A,B分別代表非零複數z,w。

若$\angle AOB=90^\circ$，則下列哪些選項必為**<u>負實數</u>**？(多選)

(1) $\dfrac{z}{w}$ (2) zw (3) $(zw)^2$ (4) $\dfrac{z^2}{w^2}$

(5) $(z\overline{w})^2$ (其中$\overline{w}$為w的共軛複數) 【101年學測】

$\boxed{解}$：令$z=r_1\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right),w=r_2\left(\cos\beta+i\sin\beta\right),\alpha-\beta=90^\circ$

(1) $\dfrac{z}{w}=\dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+i\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)=\dfrac{r_1}{r_2}i$

(2) $zw=r_1r_2\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+i\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$

(3) $\left(zw\right)^2=r_1^2r_2^2\left(\cos\left(2\alpha+2\beta\right)+i\sin\left(2\alpha+2\beta\right)\right)$

(4) $\left(\dfrac{z}{w}\right)^2=\left(\dfrac{r_1}{r_2}i\right)^2=-\dfrac{r_1^2}{r_2^2}<0$

(5) $\left(z\overline{w}\right)^2=\left(r_1r_2\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+i\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)\right)^2=\left(r_1r_2i\right)^2=-r_1^2r_2^2$

選(4)(5)

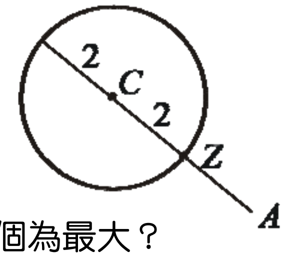
【範例三】設$|Z+2-i|=2$，則$|Z-1+3i|$最大________，最小________。

$\boxed{解}$：$\left|Z-(-2+i)\right|=2$表以$C(-2,1)$為圓心，半徑為2之圓

$\left|Z-(1-3i)\right|$表圓周上的點與$A(1,-3)$之距離

$\therefore$所求最大為$\overline{CA}+2=5+2=7$

最小為$\overline{CA}-2=5-2=3$



【範例四】設$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{11}+i\sin\dfrac{2\pi}{11}$，則下列各數值哪一個為最大？

(A) $|2+\omega|$ (B) $|2+\omega^3|$ (C) $|2+\omega^5|$

(D) $|2+\omega^7|$ (E) $|2+\omega^9|$

$\boxed{解}$：$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{11}+i\sin\dfrac{2\pi}{11}\Rightarrow\omega^{11}=\cos2\pi+\sin2\pi=1$

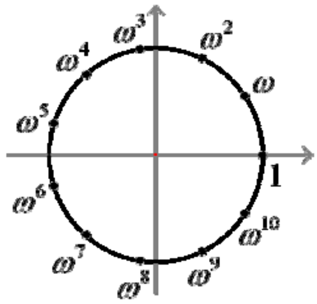
1的11次方根為$1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{10}$

在複數平面上均位於單位圓上且將此單位圓11等分如右圖所示

而$|2+(a+bi)|=|(a+bi)-(-2+0i)|$

其值相當於坐標平面(a,b)與$(-2,0)$兩點之距離

由圖形知



$|2+\omega|=|2+\omega^{10}|>|2+\omega^2|=|2+\omega^9|>|2+\omega^3|=|2+\omega^8|$

$>|2+\omega^4|=|2+\omega^7|>|2+\omega^5|=|2+\omega^6|$

【範例五】在複數平面上，設O為原點，且A,B分別表示坐標為複數$z,z+1$的點。已知點A、點B都在以O為圓心的單位圓上， 試選出正確的選項。

(1) 直線AB與實數軸平行 (2) $\triangle OAB$為直角三角形

(3) 點A在第二象限 (4) $z^3=1$ 【109年指考數甲】

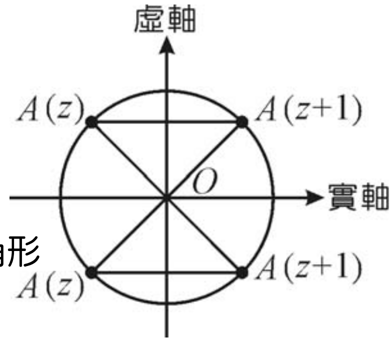
(5) 坐標為$1+\dfrac{1}{z}$的點也在同一單位圓上

$\boxed{解}$：(1) $B(z+1)$為$A(z)$向右平移1單位

$\therefore\overline{AB}$平行實軸

(2) $\because\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{OB}=1$ $\therefore\triangle OAB$為正三角形

(3) 由圖知$A(z)$在第二象限或第三象限



(4) $\because Arg(z)=120^\circ$ 或 240°

$\therefore z=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$ 或 $z=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$ $\therefore z^3=1$

(5) $1+\dfrac{1}{z}=1+\overline{z}$ 單位圓上　　　選(1)(4)(5)

【範例六】已知複數 z 滿足 $z^n+z^{-n}+2=0$，其中 n 為正整數。將 z 用極式表式為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，且 $r>0$。試選出正確的選項。

(1) $r=1$　　　(2) n 不能是偶數

(3) 對給定的 n，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設

(4) θ 可能是 $\dfrac{3\pi}{7}$　　　(5) θ 可能是 $\dfrac{4\pi}{7}$　　　【106 年指考數甲】

$\boxed{解}$：$z^n+\dfrac{1}{z^n}+2=0\Rightarrow\left(z^n\right)+2z^n+1=0\Rightarrow\left(z^n+1\right)^2=0$ $\therefore z^n=-1$

$\therefore r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)=1\cdot\left(\cos\left(\pi+2k\pi\right)+i\sin\left(\pi+2k\pi\right)\right)$

$$\therefore\begin{cases} r^n=1\Rightarrow r=1 \\ n\theta=\pi+2k\pi\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi+2k\pi}{n}\end{cases}$$

(2) n 可為偶數

(3) 恰有 n 個不同的複數

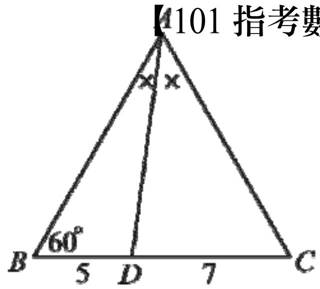
(4)(5) 當 $n=7,k=1$ 時，$\theta=\dfrac{3\pi}{7}$　　　選(1)(4)

第九重點：正餘弦定理(含疊合)

【範例一】在$\triangle ABC$中，D為$\overline{BC}$邊上一點且$\overline{AD}$平分$\angle BAC$。已知$\overline{BD}=5$、$\overline{DC}=7$，且$\angle ABC=60^\circ$，試求：

(1) $\sin\angle ACB=$________。 (2) $\sin\angle BAC=$________。

(3) $\overline{AB}=$________。 【101 指考數甲】



$\boxed{解}$：(1) $\triangle ABC$中$\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{5}=\dfrac{\sin 60^\circ}{\overline{AD}}\cdots①$

$\triangle ACD$中$\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{7}=\dfrac{\sin C}{\overline{AD}}\cdots②$

$\dfrac{①}{②}:\dfrac{7}{5}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C}$ $\therefore \sin C=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

(2) $\sin A=\sin\left[180^\circ-(B+C)\right]=\sin(B+C)$

$=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{11}{14}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

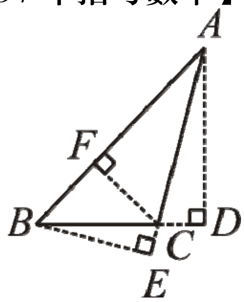
(3) 由正弦定理：$\triangle ABC$中$\dfrac{\sin A}{12}=\dfrac{\sin C}{c}$ $\therefore \dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{12}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{14}}{c}$

$\therefore \overline{AB}=c=\dfrac{15}{2}$

【範例二】設$\triangle ABC$的三高分別為$\overline{AD}=6$、$\overline{BE}=4$、$\overline{CF}=3$。

(1) 試證：$\triangle ABC$是一鈍角三角形。

(2) 試求$\triangle ABC$的面積________。 【97 年指考數甲】



$\boxed{解}$：(1) 令$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$

$\therefore \triangle=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 6=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot 4=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot 3$

$\therefore 6a=4b=3c$ $\therefore a:b:c=2:3:4$

令$a=2k$，$b=3k$，$c=4k\,(k>0)$

$\because \cos C = \dfrac{4k^2 + 9k^2 - 16k^2}{2 \cdot 2k \cdot 3k} = -\dfrac{1}{4} < 0$

$\therefore \angle C$ 為鈍角，$\triangle ABC$ 為鈍角三角形，故得證

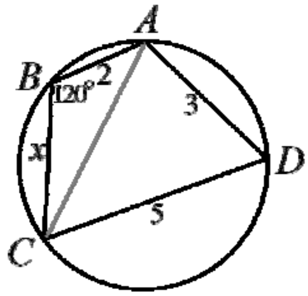
(2) $\because \cos C = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \sin C = \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{6}{b} = \dfrac{6}{3k} \Rightarrow k = \dfrac{8}{\sqrt{15}}$

$\therefore \triangle ABC$ 面積 $= \dfrac{1}{2} 2k \cdot 3k \cdot \sin C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{16}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{24}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{48}{\sqrt{15}}$

【範例三】圓內接四邊形 $ABCD$，若 $\overline{AB} = 2$，$\overline{AD} = 3$，$\overline{CD} = 5$，

$\angle B = 120°$，則(1) $\overline{BC} =$________。　(2) $\overline{BD} =$________。

(3) 四邊形面積為________。



$\boxed{\text{解}}$：(1) $\overline{AC}^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 120°$

$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60°$　　$\therefore x = \overline{BC} = 3$

(2) $\overline{BD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\theta$

$= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(180° - \theta)$

$\therefore 13 - 12\cos\theta = 34 + 30\cos\theta$

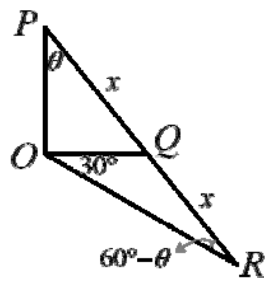
$\therefore \cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　$\therefore \overline{BD}^2 = 19$　　$\therefore \overline{BD} = \sqrt{19}$

(3) 四邊形面積 $= \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60° + \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 120° = \dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

【範例四】某人在 O 點測量到遠處有一物作等速直線運動。開始時該物位置在 P 點，一分鐘後，其位置在 Q 點，且 $\angle POQ = 90°$。

再過一分鐘後，該物位置在 R 點，且 $\angle QOR = 30°$。請以最簡分數表示 $\tan^2(\angle OPQ) =$________。　　【91 年指考數甲】

$\boxed{\text{解}}$：設 $\overline{PQ} = \overline{QR} = x, \angle OPQ = \theta \Rightarrow \overline{OQ} = x\sin\theta$



$\triangle OQR$ 中，$\angle ORQ = 60° - \theta$

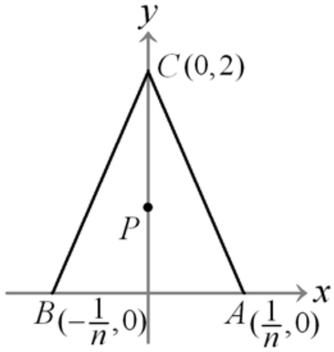
$\dfrac{x\sin\theta}{\sin(60° - \theta)} = \dfrac{x}{\sin 30°}$　　$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\sin\theta = \sin(60° - \theta)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \tan^2\theta = \dfrac{3}{4}$

【範例五】設 n 為正整數，坐標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是 $(0,2)$、$(\frac{1}{n},0)$、$(-\frac{1}{n},0)$，假設此三角形的外接圓直徑長等於 D_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n=$______。



解：$\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{\frac{1}{n^2}+4}$，$\sin\angle CBA=\frac{2}{\overline{BC}}=\frac{2}{\overline{AC}}$

$\frac{\sin\angle CBA}{\overline{AC}}=\frac{1}{D_n}\Rightarrow\frac{2}{\frac{1}{n^2}+4}=\frac{1}{D_n}\ \therefore D_n=2+\frac{1}{2n^2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}D_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{2n^2})=2$

【範例六】設 $270^\circ<A<360^\circ$ 且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004^\circ$，若 $A=m^\circ$，則 $m=$________。　【93 年學測】

解：$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)=2\sin(A+30^\circ)$

又 $2\sin 2004^\circ=2\sin 204^\circ=2\sin 336^\circ\quad\therefore A+30^\circ=336^\circ$

$\therefore A=306^\circ$

【範例七】若 θ 使下述方程式不只有一組解，求 $\sin\theta+\cos\theta=$________。

$$\begin{cases}(1+\cos\theta)x-y=0\\ -x+(1+\sin\theta)y=0\end{cases}$$

【93 年指考數甲】

解：由已知得 $\Delta=\begin{vmatrix}1+\cos\theta & -1\\ -1 & 1+\sin\theta\end{vmatrix}=0$

$\therefore (1+\cos\theta)(1+\sin\theta)-1=0\quad\therefore \cos\theta+\sin\theta+\cos\theta\cdot\sin\theta=0$

令 $t=\cos\theta+\sin\theta\quad\therefore t^2=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$\therefore t+\frac{t^2-1}{2}=0\quad\therefore t^2+2t-1=0\quad\therefore t=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

但 $\because -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\quad\therefore t=-1+\sqrt{2}\quad\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=-1+\sqrt{2}$

第十重點：隨機變數的期望值與變異數

（一） 隨機變數之期望值與變異數：

若隨機變數 X 的機率分布如右：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$

則 X 的期望值 $\mu = E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

X 的變異數為 $Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 p_k = E(X^2) - \mu^2$

X 的標準差為 $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

（二） 隨機變數之線性變換：

(1) $E(aX+b) = aE(X) + b$，$E(b) = b$

(2) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$，$Var(b) = 0$

(3) $\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$，$\sigma_b = 0$

（三） 隨機變數之標準化：

令隨機變數 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，

則 Z 的期望值為 $E(Z) = 0$，Z 的標準差為 $\sigma_Z = 1$。

（四）二項分布的期望值與變異數：

設隨機變數 X 的機率分布為二項分布且每次試驗成功機率為 p，失敗機率為 $q = 1 - p$ 則

(1) 成功次數 X 的數學期望值 $\mu = E(X) = np$

(2) 成功次數 X 的變異數 $\sigma^2 = Var(X) = npq$

(3) 成功次數 X 的標準差 $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq}$

(4) 恰有 k 次成功機率 $P_k = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$

當 $k = [(n+1)p]$ 時，P_k 會產生最大

註：若 $(n+1)p$ 為整數，則 $k = (n+1)p$ 及 $k = (n+1)p - 1$ 時，P_k 均為最大

(5) n 夠大時，二項分配 $B(n,p)$ 會接近常態分配

此時 $\mu = E(x) = np$，$\sigma^2 = Var(x) = npq \quad (q = 1-p)$

$\therefore$ ① $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) \doteqdot 0.68 = 68\%$

② $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \doteqdot 0.95 = 95\%$

③ $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) \doteqdot 0.997 = 99.7\%$

【範例一】假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於 p（其中$0<p<1$），且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數 X 代表一場比賽9局中出現失誤的局數，且令 p_k 代表9局中恰有k局出現失誤的機率$P(X=k)$。已知 $p_4+p_5=\dfrac{45}{8}p_6$，則該球隊在一場9局的比賽中出現失誤局數的期望值為________。　　　【107 年指考數甲】

解：$C_4^9p^4(1-p)^5+C_5^9p^5(1-p)^4=\dfrac{45}{8}C_6^9p^6(1-p)^3$

$$\therefore 15p^2+4p-4=0\Rightarrow p=\frac{2}{5}\therefore E(X)=np=\frac{18}{5}$$

【範例二】擲一枚均勻硬幣4次，恰好出現n次正面的機率記為a_n；擲一枚均勻硬幣8次，恰好出現n次正面的機率記為b_n。試問以下哪些選項是正確的？　　　【95 年指考數甲】

(1) $a_2=\dfrac{1}{2}$　　(2) $a_2=b_4$　　(3) $b_2=b_6$

(4) $a_3>b_3$　　(5) $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_8$中的最大值是b_4

解：(1) $a_2=C_2^4(\dfrac{1}{2})^2(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$

(2) $b_4=C_4^8(\dfrac{1}{2})^4(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{35}{128}$　　$\therefore a_2\neq b_4$

(3) $b_2=C_2^8(\dfrac{1}{2})^2(\dfrac{1}{2})^6$，$b_6=C_6^8(\dfrac{1}{2})^6(\dfrac{1}{2})^2$　　$\therefore b_2=b_6$

(4) $a_3=C_3^4(\dfrac{1}{2})^3(\dfrac{1}{2})^1=\dfrac{1}{4}$，$b_3=C_3^8(\dfrac{1}{2})^3(\dfrac{1}{2})^5=\dfrac{7}{32}$　　$\therefore a_3>b_3$

(5) $b_k=C_k^8(\dfrac{1}{2})^8$，$k=4$時$b_4$最大　　　答：(3)(4)(5)

【範例三】以隨機變數 X 表示投擲一顆公正骰子出現的點數，今隨機變數 $Y=3X+5$，求隨機變數Y的期望值________、變異數________與標準差________。

解：

X	1	2	3	4	5	6
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=\dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\dfrac{7}{2}$

$$E(X^2)=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times\frac{1}{6}=(\frac{1}{6}\times6\times7\times13)\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

$$\therefore Var(X)=E(X^2)-\left[(E(X)\right]^2=\frac{91}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{35}{12}$$

(1) $\because Y=3X+5\quad\therefore E(Y)=3E(X)+5=3\times\frac{7}{2}+5=\frac{31}{2}$

(2) $Var(Y)=9Var(X)=9\times\frac{35}{12}=\frac{105}{4}$ (3) $\sigma_Y=\sqrt{Var(Y)}=\frac{\sqrt{105}}{2}$

【範例四】設隨機變數 X 滿足 $B(20,0.3)$ 則下列何者為真？

(1) X 的期望值為 6　(2) X 的標準差大於 4

(3) $X=6$ 時的機率最大　(4) $P(X=8)>P(X=10)$

(5) $P(X=4)<P(X=5)$

$\boxed{解}$：(1) X 的期望值為 $E(X)=np=20\times0.3=6$

(2) X 的標準差 $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{20\times0.3\times0.7}=\sqrt{4.2}<4$

(3) $k=[(n+1)p]=[21\times\frac{3}{10}]=[6.3]=6\quad\therefore p(x=6)$ 最大

(4) $P(X=8)>P(X=10)$

(5) $P(X=4)<P(X=5)$　答：(1)(3)(4)(5)

【範例五】一盒子裡有 $n(n>3)$ 顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、n 分及 1 分。若所得分數的期望值為 E_n，則 $\lim_{n\to\infty}E_n=$________。　【104 年指考數甲】

$\boxed{解}$：設任取一球，則

x	$2n$	n	1
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{n-3}{n}$

$\therefore E(x)=2+2+\frac{n-3}{n}=4+\frac{n-3}{n}$

$$\therefore E_n=3E(x)=12+\frac{3(n-3)}{n}\ \therefore\lim_{n\to\infty}E_n=12+3=15$$

【範例六】一圓盤分成標有數字 $0,1$ 的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為 $\frac{1}{4}$，而停在不

同區域的機率為$\frac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。若遊戲前指針的位置停在標號數字為1的區域，則此遊戲的期望值為________。 【105 年指考數甲】

解：

x	3	2	1	0
$f(x)$	$(\frac{1}{4})^3$	$(\frac{1}{4})^2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2+(\frac{3}{4})^2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+(\frac{3}{4})^3+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^2$

$\therefore$

x	3	2	1	0
$f(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{3}{64}$

$$\Rightarrow E(x)=\frac{3\times1+2\times21+1\times39}{64}=\frac{84}{64}=\frac{21}{16}$$

答：$\frac{21}{16}$

第十一重點：多項式

(甲) 插值法

【範例一】二次函數 $y=f(x)$ 圖形過 $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,7)$ ，求 $f(4)=$________。

$\boxed{\text{解一}}$：$\because$ $f(1)=1$， $f(2)=3$， $f(3)=7$ 可令 $f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+1$

$$\begin{cases} f(2)=3\Rightarrow b+1=3 \quad \therefore b=2 \\ f(3)=7\Rightarrow 2a+2b+1=7 \quad \therefore a=1 \end{cases}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x-2)+2(x-1)+1$ $\qquad$ $\therefore$ $f(4)=6+6+1=13$

$\boxed{\text{解二}}$：

$$f(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+7\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)-3(x-1)(x-3)+\frac{7}{2}(x-1)(x-2)$$

$\therefore$ $f(4)=1+(-9)+21=13$

【範例二】已知 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ 為實係數多項式，

$f\left(15\right)=mf\left(11\right)+nf\left(12\right)+kf\left(14\right)$，則 $m+n+k=$________。

$\boxed{\text{解}}$：

$$f\left(x\right)=f\left(11\right)\cdot\frac{\left(x-12\right)\left(x-14\right)}{\left(-1\right)\cdot\left(-3\right)}+f\left(12\right)\cdot\frac{\left(x-11\right)\left(x-14\right)}{1\cdot\left(-2\right)}+f\left(14\right)\cdot\frac{\left(x-11\right)\left(x-12\right)}{3\cdot 2}$$

$\therefore$ $f\left(15\right)=f\left(11\right)-2f\left(12\right)+2f\left(14\right)$

$\therefore m+n+k=1+\left(-2\right)+2=1$

(乙) 餘式與因式定理

【範例一】若 $f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $x-2$ 所得的餘式為________。(1) 1 $\quad$ (2) 2 $\quad$ (3) 7 $\quad$ (4) 9 $\quad$ (5) 11

$\boxed{\text{解}}$：$g(x)$ 除以 $(x-2)$ 餘 $g(2)$

$\therefore g(2)=f(f(2))=f(3)=27-18-3+5=11$

【範例二】給定二次多項式 $f(x)=x^2+ax+b$，已知多項式 x^3+3x^2+4x+2 除以 $f(x)$ 其餘式為 $3x+2$，多項式 x^3+x^2-x-1 除以 $f(x)$ 其餘式為 $4x+1$，請選出正確的選項。

(1) $a=3$　(2) $b=-1$　(3) 方程式 $f(x)=0$ 無實根

(4) $f(x)$ 的極小值為 $\frac{5}{4}$　(5) $f(x)$ 除以 $(x+3)$ 其餘式為 1

【97 年指考數乙】

$\boxed{\text{解}}$：$f(x)\,|\,(x^3+3x^2+4x+2)-(3x+2)$

$\therefore f(x)\,|\,x^3+3x^2+x=x(x^2+3x+1)$

$f(x)\,|\,(x^3+x^2-x-1)-(4x+1)$

$\therefore f(x)\,|\,x^3+x^2-5x-2=(x-2)(x^2+3x+1)$

$\therefore f(x)=x^2+3x+1$　$\therefore a=3$，$b=1$

$\because$ 判別式 $=9-4>0$　$\therefore f(x)=0$ 有二相異實根

(4) $f(x)=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$　$\therefore f(x)$ 極小值為 $-\frac{5}{4}$

(5) $f(x)\div(x+3)$ 餘 $f(-3)=1$

選(1)(5)

【範例三】設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+i)=5$ 與 $f(i)=10$（其中 $i=\sqrt{-1}$），且 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+2)(x^2+1)$ 的餘式為 $g(x)$。請選出正確的選項。

(1) $g(1+i)=5$　(2) $f(-i)=-10$

(3) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的餘式是一次多項式

(4) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的商式是 $2x+1$

(5) $g(x)=2x^3-7x^2+2x+3$

$\boxed{\text{解}}$：(1)　$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+1)Q(x)+g(x)$

$\therefore f(1+i)=g(1+i)=5, f(i)=g(i)=10$

(2)　$f(-i)=\overline{f(i)}=\overline{10}=10$

(3)(4)　$\because g(1+i)=5, g(i)=10, \deg(g(x))\le 3$

$g(x)=(x^2-2x+2)(ax+b)+5$

$g(i)=10\Rightarrow(1-2i)(ai+b)+5=10\Rightarrow a=2,b=1$

$g(x)=(x^2-2x+2)(2x+1)+5=2x^3-3x^2+2x+7$ 選(1)(4)

（丙）方程式的根

（一） 牛頓定理：

設 $p,q\in\mathbb{Z}$ 且 $(p,q)=1$，

若 $\dfrac{q}{p}$ 是整係數方程式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 之一根，

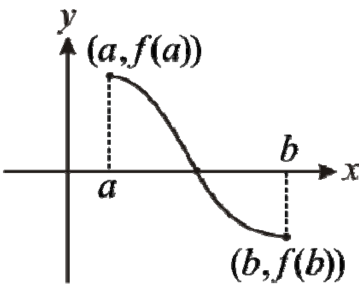
則 $p\mid a_n$，$q\mid a_0$ 且 $p-q\mid f(1)$，$p+q\mid f(-1)$。

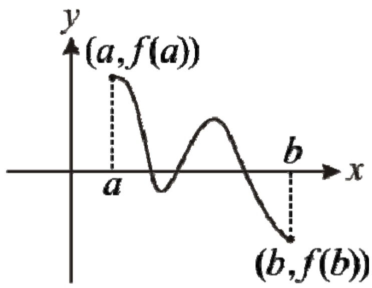
（二） 勘根定理：

設 $f(x)$ 為一實係數多項式

① 若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 至少有一實根（或奇數個實根）介於 a,b 之間。

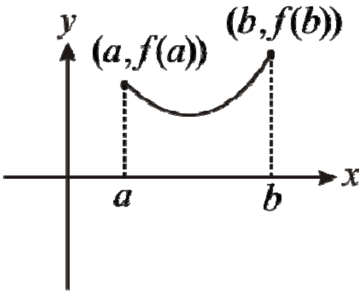
[圖形表示]

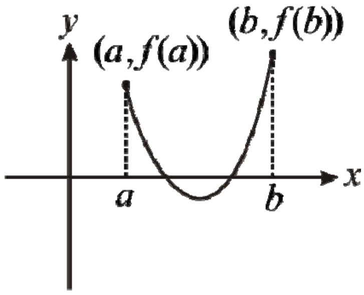




② 若 $f(a)\cdot f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間或無實根，或有偶數個實數。

[圖形表示]





（三） n 次多項式：

設 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根為 α,β,γ，則 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$

【範例一】設整係數方程式 $x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有 4 個相異有理根，則其最大根為________。(A) 10　(B) 5　(C) 2　(D) 1　(E) -1

$\boxed{解}$：可能有理根為 $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ 又四根積 $=10$，且四根和 $=-3$

$\therefore$ 四根為 $\pm1,2,-5$　　$\therefore$ 最大根為 2

【範例二】考慮三次多項式 $f(x)=-x^3-3x^2+3$。試回答下列問題。

(1) 在坐標平面上，試描繪 $y=f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。

(2) 令 $f(x)=0$ 的實根為 a_1,a_2,a_3，其中 $a_1<a_2<a_3$。試求 a_1,a_2,a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。

(3) 承(2)，試說明 $f(x)=a_1, f(x)=a_2, f(x)=a_3$ 各有幾個相異實根。

(4) 試求 $f(f(x))=0$ 有幾個相異實根

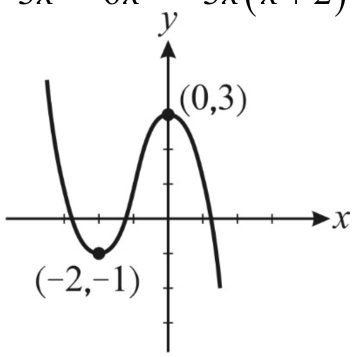
（註：$f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3$）。【107 年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) $f(x)=-x^3-3x^2+3$，$f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

令 $-3x(x+2)=0$，$x=0$ 或 -2，

極值點為 $(0,3)$、$(-2,-1)$

又首項係數為負，得右圖

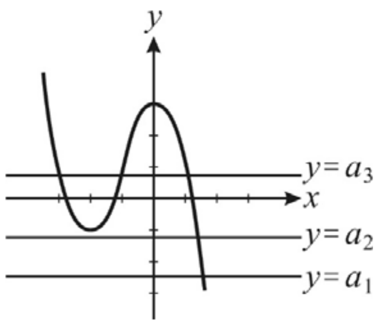


(2) 由勘根定理

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	-1	1	3	-1

得 $-3<a_1<-2$、$-2<a_2<-1$、$0<a_3<1$

(3) 如圖，$f(x)=a_1 \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=a_1 \end{cases}$



有 1 交點 $\Rightarrow$ 有 1 實根

$f(x)=a_2 \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=a_2 \end{cases}$ 有 1 交點 $\Rightarrow$ 有 1 實根

$f(x)=a_3 \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=a_3 \end{cases}$ 有 3 交點 $\Rightarrow$ 有 3 實根

(4) $f(x)=0$之三根為a_1、a_2、a_3

故當$f(x)=a_1$或a_2或a_3時$f\left(f(x)\right)=0$

得解之個數為$1+1+3=5$

【範例三】關於非常數的實係數多項式函數$f(x)$，試選出正確的選項。

(1) 若$f(1)f(2)<0$，則存在$c\in(1,2)$滿足$f(c)=0$

(2) 若$f(1)f(2)>0$，則對任意的$c\in(1,2)$，$f(c)\neq 0$均成立

(3) 若$f(1)f(2)f(3)<0$，則存在$c\in(1,3)$滿足$f(c)=0$

(4) 若$(\int_0^1 f(x)dx)(\int_0^2 f(x)dx)<0$，則存在$c\in(1,2)$滿足

$\int_0^c f(x)dx=0$

(5) 若$\int_1^2 f(x)dx=0$，則$f(1)f(2)<0$　　【109 年指考數甲(補)】

$\boxed{解}$：(1) $\because f(x)$為連續函數，由勘根定理，存在$c\in(1,2)$滿足$f(c)=0$

(4) 令$F(t)=\int_0^t f(x)dx$為連續函數

$\because (\int_0^1 f(x)dx)(\int_0^2 f(x)dx)<0 \Rightarrow F(1)F(2)<0$

$\because F(t)$為連續函數，由勘根定理，存在$c\in(1,2)$滿足$F(c)=0$，

即$\int_0^c f(x)dx=0$　　選(1)(4)

【範例四】設$f(x)$為三次實係數多項式，且知複數$1+i$為$f(x)=0$之一解。

試問下列哪些敘述是正確的？

(1) $f(1-i)=0$　(2) $f(2+i)\neq 0$　(3) 沒有實數x滿足$f(x)=x$

(4) 沒有實數x滿足$f(x^3)=0$

(5) 若$f(0)>0$且$f(2)<0$, 則$f(4)<0$　　【93 年學測】

$\boxed{解}$：(1) 實係數三次方程式$f(x)=0$有一根為$1+i$，另一虛根為$1-i$

(2) $\because$虛根成雙　$\therefore f(2+i)\neq 0$

(3) $f(x)=x$為三次方程式　$\therefore$至少有一個實根

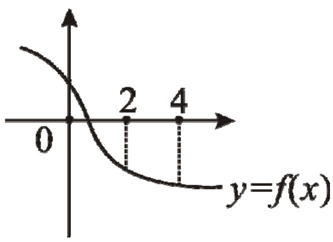
(4) $f(x^3)=0$為九次方程式　$\therefore$至少有一個實根

(5) $\because f(x)=0$恰有一個實根且$f(0)>0$，$f(2)<0$

$\therefore$實根在$(0,2)$之間

$\therefore$由圖中知$f(4)<0$

選(1)(2)(5)



【範例五】實係數函數 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+ax+b$，若 $f(x)=0$ 有一根為 $2+i$，求：

(1) $a=$________，$b=$________。

(2) 滿足 $f(x)<0$ 之 x 範圍為________。

$\boxed{解}$：(1) $x=2+i \quad \therefore (x-2)^2=-1 \quad \therefore x^2-4x+5=0$

$\therefore f(x)=x^4-5x^3+3x^2+ax+b=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)$

$\therefore a=19$，$b=-30$

(2) $f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-x-6)<0$

$\therefore x^2-x-6<0 \quad \therefore (x+2)(x-3)<0 \quad \therefore -2<x<3$

第十二重點：直線與圓

【範例一】設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0,\frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。

(1) Γ 的半徑大於或等於 5

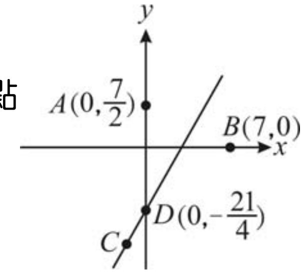
(2) 當 Γ 的半徑達到最小可能值時，Γ 通過原點

(3) Γ 與直線 $x+2y=6$ 有交點

(4) Γ 的圓心不可能在第四象限

(5) 若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8【108 年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1)(2) 若此圓半徑為最小時，$(7,0)$、$\left(0,\frac{7}{2}\right)$ 必為直徑端點，圓為 $(x-7)x+y\left(y-\frac{7}{2}\right)=0$ 必過原點



此時半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{7^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{4}<5$

(3) 若圓心 (x_0,y_0) 在第一象限且 x_0、$y_0\to\infty$ 可能無交點

(4) 圓心在 A、B 之中垂線上

此中垂線：$L:2x-y=\frac{21}{4}$，

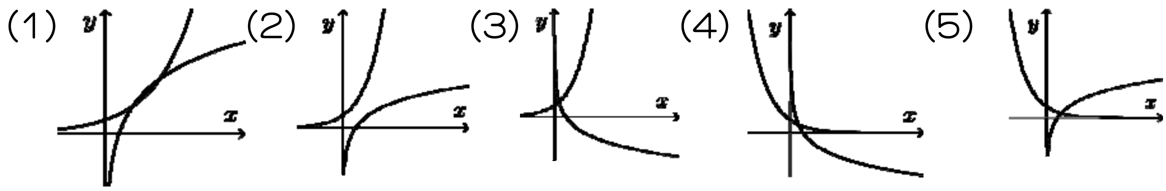
所以圓心可在第四象限

(5) 若圓心 C 在第三象限，此時半徑 $\overline{CA}>\overline{AD}=\frac{35}{4}>8$ 選(2)(5)

第十三重點：指數與對數

(甲) 圖形

【範例一】請問下列哪一個選項可以表示 $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$ 和 $y=\log_{\sqrt{2}} x$ 的圖形？



$\boxed{解}$：交點為 $(2,2),(4,4)$ 故選(1)

【範例二】若 $y=2^x$ 與 $y=2-x$ 相交於點 $A(\alpha,2-\alpha)$， $y=\log_2 x$ 與 $y=2-x$ 相交於點 $B(\beta,2-\beta)$，求 $\alpha+\beta=$_______。

$\boxed{解}$：$\because y=x^x$ 與 $y=\log_2 x$ 圖形對稱於 $x-y=0$

$\therefore A,B$ 中點為 $x-y=0$ 與 $y=2-x$ 交點 $M(1,1)$

$\therefore \dfrac{\alpha+\beta}{2}=1 \quad \therefore \alpha+\beta=2$

【範例三】細菌分裂增為原來的兩倍所需的時間，稱為世代時間 (*Generation time*)，細菌的世代時間決定於細菌的種類及環境條件的影響。目前實驗室在老鼠身上發現一種細菌，觀察細菌後，發現時間 x(分)與數量的對數值(以10為底) y 之關係圖為通過 $(0,3.7)$ 及 $(50,4)$ 的一條直線，則此細菌的世代時間約為幾分鐘？($\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$)

(A) 30分 (B) 40分 (C) 50分 (D) 60分 (E) 70分

【2020 年 TMT】

$\boxed{解}$：設世代時間為 k， 細菌原始數量為 A $\therefore$ 經過 x 分鐘後細菌數量為 $A\cdot 2^{\frac{x}{k}}$

$\therefore y=\log(A\cdot 2^{\frac{x}{k}})=\log A+\dfrac{x}{k}\log 2$

代 $(0\,,3.7)\Rightarrow 3.7=\log A\cdots\cdots$①

代 $(50\,,4)\Rightarrow 4=\log A+\dfrac{50}{k}\log 2\cdots\cdots$②

②－①：$0.3=\dfrac{50}{k}\log 2 \;\therefore 0.3=\dfrac{50}{k}\times(0.3010) \quad \therefore k\approx 50$

【範例四】考慮坐標平面上滿足 $2^x = 5^y$ 的點 $P(x,y)$，試問下列哪一個選項是錯誤的？

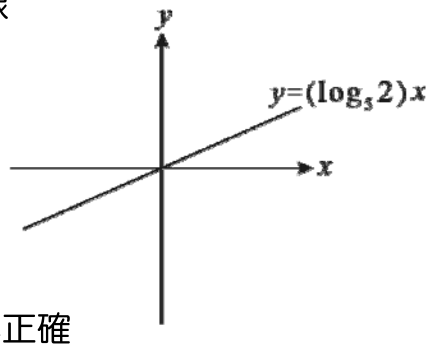
(1) $(0,0)$ 是一個可能的 P 點

(2) $(\log 5, \log 2)$ 是一個可能的 P 點

(3) 點 $P(x,y)$ 滿足 $xy \geq 0$

(4) 所有可能的點 $P(x,y)$ 構成的圖形為一直線

(5) 點 P 的 x, y 坐標可以同時為正整數



解：$2^x = 5^y \Rightarrow \log_5 2^x = \log_5 5^y$

$\therefore y = (\log_5 2)x$ 表過 $(0,0)$ 且斜率為 $\log_5 2$ 的直線

如圖所示：故 $(1)(2)(3)(4)$ 均正確

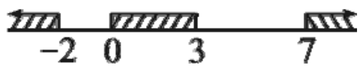
但若 $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow \log_5 2 = \dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}$（不合）　故 (5) 不正確

(乙) 不等式

【範例一】設 $f(x) = \dfrac{(2^x - 128)(3^x - 1)(6^x + 6)}{(5^x - 125)(2^{-x} - 4)}$，若 $f(a) < 0$，則 a 可以是下列何數？(1) -3　(2) 2　(3) $\sqrt{20}$　(4) $\sqrt{40}$。

解：$f(a) = \dfrac{(2^a - 2^7)(3^a - 3^0)(6^a + 6)}{(5^a - 5^3)(2^{-a} - 2^2)} < 0$ 即

$(a-7)(a-0)(a-3)(-a-2) < 0$



$\therefore (a+2) \cdot a \cdot (a-3)(a-7) > 0$

$\therefore$ 由所求範圍判斷(1)(2)正確

【範例二】不等式 $\log_4(-x^2 + 4x + 5) \geq \log_2 \sqrt{3x-1}$ 解的範圍為________。

解：限制 $\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) < 0 \\ 3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$　交集 $\dfrac{1}{3} < x < 5 \cdots\cdots$ ①

由已知：$\log_4(-x^2 + 4x + 5) \geq \log_4(3x-1)$

$\therefore -x^2 + 4x + 5 \geq 3x - 1$　$\therefore x^2 - x - 6 \leq 0$

$\therefore (x+2)(x-3) \leq 0$　$\therefore -2 \leq x \leq 3 \cdots\cdots$ ②　由①②：$\dfrac{1}{3} < x \leq 3$

(丙) 首數尾數與應用題

【範例一】觀察2的次方所形成的等比數列：$2,2^2,2^3,2^4,\cdots$，設其中出現的第一個13位數為2^n，則$n=$________。(註：$\log_{10}2\approx 0.3010$)

$\boxed{解}$：$12\le \log 2^n<13\Rightarrow \dfrac{12}{\log 2}\le n<\dfrac{13}{\log 2}\Rightarrow 39.8\sim\le n<43.18\sim \therefore n$最小40

【範例二】設n為正整數。第n個費馬數(Fermat Number)定義為$F_n=2^{(2^n)}+1$，例如$F_1=2^{(2^1)}+1=5, F_1=2^{(2^2)}+1=2^4+1=17$，。試問$\dfrac{F_{13}}{F_{12}}$的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？($\log 2\approx 0.3010$)

(1) 120 (2) 240 (3) 600 (4) 900 (5) 1200

【108年指考數甲】

$\boxed{解}$：$\dfrac{F_{13}}{F_{12}}=\dfrac{2^{2^{13}}+1}{2^{2^{12}}+1}\Rightarrow \log\dfrac{F_{13}}{F_{12}}=\log F_{13}-\log F_{12}$

$\approx \log 2^{2^{13}}-\log 2^{2^{12}}=\left(2^{13}-2^{12}\right)\log 2$

$=4096\times 0.3010=1232.896 \quad \therefore \dfrac{F_{13}}{F_{12}}$為1233位數，故選(5)

第十四重點：古典機率與條件機率

【範例一】擲一公正硬幣5次，令A表示有連續三次的投擲中恰好出現「正面、正面、反面」的事件，B表示有連續三次的投擲中恰好出現「 正面、反面、反面」的事件， 請問下列哪些選項是正確的？

(1) $P(A)=\dfrac{3}{8}$　(2) $P(A)=P(B)$　(3) $P(A\cap B)=0$

(4) $P(B|A)=\dfrac{1}{6}$　(5) $P(A\cup B)=\dfrac{5}{16}$　【100研究用試卷】

$\boxed{\text{解}}$：(1)(2) A事件中連續三次的「正正反」可能出現在第$1\sim3$次或第$2\sim4$次或第$3\sim5$次，有三種情形

$\therefore P(A)=\dfrac{3\times2^2}{2^5}=\dfrac{3}{8}$，同理$P(B)=\dfrac{3}{8}$

(3) $A\cap B$事件為連續四次的「正正反反」可能出現在第$1\sim4$次或第$2\sim5$次，有二種情形$\therefore P(A\cap B)=\dfrac{2\times2}{2^5}=\dfrac{1}{8}$

(4) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{1}{3}$

(5) $P(A\cup B)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$　答：(1)(2)

【範例二】某手機公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的手機中分別有5%，3%，3%是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過$\dfrac{5}{12}$，則甲生產線所製造的手機數量可占全部手機產量的百分比至多為________%。

$\boxed{\text{解}}$：設生產數量甲為a，乙為b，丙為$1-a-b$

依題意可得$\dfrac{0.5a}{0.5a+0.3b+0.3(1-a-b)}\le\dfrac{5}{12}\Rightarrow\dfrac{0.5a}{0.2a+0.3}\le\dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow\dfrac{5a}{2a+3}\le\dfrac{5}{12}\Rightarrow12a\le2a+3\Rightarrow a\le\dfrac{3}{10}=30\%$

【範例三】袋中有2顆紅球、3顆白球與1顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。

(1)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率

(2)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件

(3)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件

(4)「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率

(5)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率　【108 年指考數甲】

$\boxed{解}$：(1) $p(\text{第一顆紅})=p(\text{第二顆紅})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\neq\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}$故不為獨立事件

(3) $\because \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\neq 0$兩者不為互斥事件

(4) $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\neq\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$

(5) $\frac{3\times2\times1}{6\times5\times4}<\frac{C_1^2\cdot C_1^3\cdot C_1^1}{C_3^6}$　　選(1)(5)